ŠKOLA ZA CESTOVNI PROMET
Trg J.F.Kennedyja 8, Zagreb

NASTAVNO PISMO
ZA PROGRAME OBRAZOVANJA ODRASLIH

Nastavni predmet :

STATISTIKA

Zanimanje :

TEHNIČAR CESTOVNOG PROMETA

3. RAZRED

Autor : **Tomislav Fabijanić,** prof.
Zagreb, 2010.

UVOD :

Područja primjene statistike su mnogobrojna. U istraživanju tržišnih potencijala i ponašanja potrošača statističke su metode osnovne analitičke metode. Rezultati primjene statističkih metoda važni su u modernom menadžmentu, upravljanju proizvodnjom i produktivnošću rada. Pri donošenju poslovnih odluka važne su prosudbe kretanja prodaja, zaliha, cijena, profita i pokazatelja burzovnog poslovanja u vremenu.
Razvijene metode statističkih predviđanja na temelju vremenskih nizova postale su važno sredstvo pomoću kojega se smanjuje rizik od donošenja pogrešnih odluka.

Statističke su metode vrlo važne za ostvarenje upravljanja kakvoćom. Te se metode odnose na praćenje i i upravljanje poslovnim događajima i proizvodnim procesima, a bez njih se ne bi mogao postići odgovarajući upravljački standard. Među mnogobrojnim su rezultatima razvoja statistike i modeli odlučivanja u doba neizvjesnosti i rizika.

Vrlo je važna uporaba statističkih informacija na razini gospodarstva. Na općoj gospodarskoj razini rabe se statistički modeli kojima se opisuju kvantitativne osobitosti gospodarstva i njegovih pojedinih dijelova. Pokazatelji koji izviru iz analize takvih modela pomoćno su sredstvo za vođenje gospodarske politike i predviđanja gospodarskih kretanja.

Statistički podaci, statistički pokazatelji dio su golemog skupa informacija kojima je izloženo moderno društvo. Bez njihova poznavanja otežano je i praćenje različitih društvenih događaja.

(Ivan Šošić, „Statistika“, Školska knjiga, Zagreb, 2009)

1. POJAM STATISTIKE :

Značenje pojma **statistike** mijenjalo se s vremenom. Danas se često pod tim pojmom podrazumijeva mnoštvo različitih brojčanih podataka predočenih tabelama i grafikonima.
Pojam statistike ne odnosi se samo na statističke podatke. Statistika se povezuje i s načinom proučavanja gospodarskih pojava i procesa.

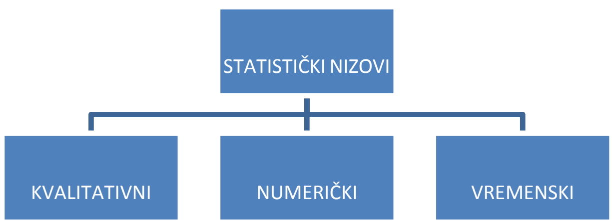
***Statistika* je znanstvena metoda prikupljanja, uređivanja, analiziranja i tumačenja raznovrsnih brojčanih podataka o pojavama i procesima u prirodi i društvu.**

Predmet proučavanja statistike kao analitičke metode jesu varijacije i kovarijacije podataka koje predočuju različite pojave i procese ili su rezultati mjerenja u statističkim pokusima.

2. UREĐIVANJE I PRIKAZIVANJE PODATAKA :

Statistički su podaci po pravilu brojni i različiti, pa nije moguće izravno zaključivanje o svojstvima pojava koje predočuju.
Stoga se pristupa njihovu **uređivanju.**
Uređivanje podataka provodi se na različite načine. Podaci se navode prema nekom pravilu ili se grupiraju. Uređivanjem podataka nastaje **statistički niz**.
Statistički nizovi pregledno se prikazuju tabelama i pomoću grafikona.

2.1. STATISTIČKI NIZOVI :



Uređivanje podataka provodi se na temelju utvrđenog pravila. Ako je podataka malo, podaci se nižu prikladnim redom : prema abecednom redu oblika varijable, prema njihovoj učestalosti, prema rangu ili kronološki.
Velik broj podataka uređuje se grupiranjem.

2.2. GRUPIRANJE NUMERIČKIH NIZOVA

Tabela 1. Tvrtke prema broju dana u blokadi u RH, stanje potkraj 2003.

Dana u blokadi	**Broj tvrtki**	**Veličina razreda (i)**	**Razredna sredina (x_i)**	**Korigirane frekvencije**
1 – 30	611	30	15.5	611
31 – 60	421	30	45.5	421
61 - 180	1212	120	120.5	303
181 – 360	1429	180	270.5	238.2
361 – 720	17840	360	540.5	1486.7
ukupno	21513			

Izvor : FINA

Frekvencija je prvog razreda 611 tvrtki koje su bile u blokadi između jednoga i trideset dana. U trećem stupcu navedene su veličine razreda. Veličina prvog razreda je 31-1 = 30. Veličina posljednjeg razreda je 721-361 = 360.Razredne sredine u četvrtom stupcu jesu poluzbrojevi granica razreda, tako je razredna sredina za prvi razred 1+30 =31/2 = 15.5.

Kako razredi nisu jednakih veličina, određene su i korigirane frekvencije.Za jediničnu je uzeta veličina razreda 30. Stoga su korigirane treće, četvrta i peta frekvencija.Treći je razred veličine 120 i 4 je puta veći od jediničnoga razreda, te se izvorna frekvencija (broj tvrtki) dijeli sa 4.Četvrta je frekvencija korigirana dijeljenjem sa 6, a posljednja dijeljenjem sa 12.

1.) Veličina razreda – dobije se tako da se od donje granice sljedećeg razreda oduzme donja granica tekućeg razreda

$$\mathbf{i} = L_3 - L_1$$

2.) Razredna sredina – poluzbroj donje i gornje granice tekućeg razreda

$$\mathbf{x}_i = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

3.) Kumulativni niz – nastaje ***postupnim*** zbrajanjem frekvencija, od prve do posljednje

$$S_i = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_i$$

4.) Korigirana frekvencija – promijenjena izvorna frekvencija kada razredi nisu istih veličina

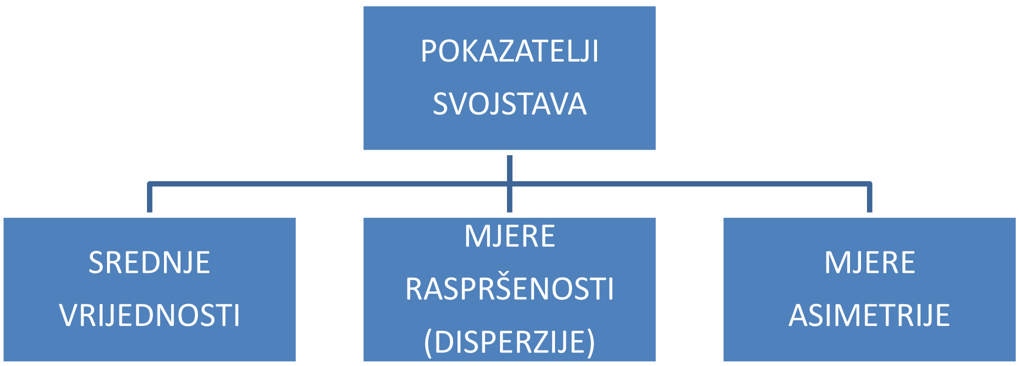
- način izračunavanja korigirane frekvencije :

1. odredi jedinični razred – razred koji prevladava
2. veličinu razreda koja se razlikuje od jediničnoga podijeli sa jediničnim razredom
3. izvornu frekvenciju (*uvijek drugi stupac u tablicama*) podijeli sa prethodno dobivenim rezultatom

Napomena: *ako se ne može odrediti jedinični razred – razred koji prevladava, svaka se izvorna frekvencija dijeli sa svojom veličinom razreda*

3. POKAZATELJI SVOJSTAVA PODATAKA :

Uređivanjem podataka u nizove, njihovim grafičkim i tabelarnim prikazivanjem omogućeno je zaključivanje o osnovnim značajkama pojave koju predočuju podaci.
U statističkoj analizi niza podataka važno je iz te skupine primijeniti brojčane pokazatelje kojima je svrha sažeto prikazati obavijesti koje daju podaci.



3.1. SREDNJE VRIJEDNOSTI :

Srednje vrijednosti su pokazatelji koji govore o gomilanju podataka oko neke vrijednosti, odnosno oblika statističke varijable.

Srednja vrijednost	- konstanta ili oblik statističke varijable kojom se predočuje niz statističkih podataka

Srednja vrijednost izračunata uporabom svih podataka naziva se *potpunom srednjom vrijednošću,* a ako je srednja vrijednost određena položajem podataka u nizu, za nju se kaže da je *položajna srednja vrijednost.*

SREDNJA VRIJEDNOST :

a) POLOŽAJNA – 1. **MOD**
2. **MEDIJAN**

b) POTPUNA - 1. **ARITMETIČKA SREDNIA**
2. **HARMONIJSKA SREDINA**
3. **GEOMETRIJSKA SREDINA**

3.1.1 MOD :

MOD – oblik kvalitativne i kvantitativne varijable koji se najčešće pojavljuje, tj. oblik varijable s najvećom frekvencijom

Mod distribucije frekvencije s razredima (grupiranim podacima) određuje se na temelju izraza :

$$Mo = L_1 + \frac{(b-a)}{(b-a)+(b-c)} * i$$

L_1 - donja granica modalnog razreda
b - frekvencija modalnog razreda
a - frekvencija ispred modalnog razreda
b - frekvencija ispod modalnog razreda
i - veličina modalnog razreda

Primjer 1:

Tabela 2. Narudžbe prema vrijednosti robe u eurima

Vrijednost narudžbi	Broj narudžbi f_i	Veličina razreda i_i	Korigirane frekvencije
100 – 150	20	50	20
150 – 200	148	50	148 $\Leftarrow$ a
L_1 200 – 250	237	50 $\Leftarrow$ i	237 $\Leftarrow$ b
250 – 350	112	100	56 $\Leftarrow$ c
350 – 500	96	150	32
500 - 700	80	200	20
ukupno	693		

Za navedenu distribuciju određuje se vrijednost moda.Razredi nisu jednakih veličina. Prije određivanja moda nužno je korigirati frekvencije. Pri korekciji frekvencija kao jedinični uzet je razred veličine 50. Frekvencija je modalnog razreda b = 237, pa je modalni razred treći. ispred modalne je a = 148, a iza modalne c = 56. Donja granica modalnog razreda iznosi L_1 = 200, a veličina modalnog razreda i = 50.
Vrijednost je moda :

$$Mo = L_1 + \frac{(b-a)}{(b-a)+(b-c)} * i \;=\; 200 + \frac{(237-148)}{(237-148)+(237-56)} * 50 \;=\; Mo = 216.48$$

Najčešća vrijednost narudžbi iznosila je 216.48 eura.

3.1.2. MEDIJAN

MEDIJAN – oblik statističke varijable koja uređeni niz podataka dijeli na dva jednakobrojna dijela

Prvih 50 % članova niza ima vrijednost varijable manju od medijana ili jednaku, a posljednjih 50 % članova ima vrijednost varijable jednaku ili veću od medijana.
Medijan se ubraja u skupinu statističkih pokazatelja koji se nazivaju **kvantilima.**
Medijan distribucije frekvencije s razredom dan je izrazom :

$$Me = L_1 + \frac{N/2 - \sum f_1}{fmed} * i$$

L_1 = donja granica medijalnog razreda
N/2 = poluzbroj statističkog skupa N
$\sum f_1$ = zbroj frekvencija do medijalnog razreda
f_{med} = frekvencija medijalnog razreda – razreda čija se vrijednost N/2 prvi puta pojavljuje u kumulativnom nizu
i = veličina medijalnog razreda

Primjer 2 :

Tabela 3. Struktura nositelja mirovina u Republici Hrvatskoj u rujnu 2004.

Mirovina	Struktura u %	Kumulativni niz	Veličina razreda
250 – 1000	16.70	16.70	750
1000 – 1500	26.98	**43.68**	500
1500 – 2000	**22.70**	66.38	**500**
2000 – 4000	30.49	96.87	2000
4000 – 8000	3.13	100.00	4000
ukupno	100.0		

Zbroj je frekvencija 100, pa je N/2 = 50. U kumulativnom nizu veličina N/2 sadržana je u kumulativnoj frekvenciji 66.38, tj. u kumulativnoj frekvenciji trećeg razreda.Medijalni je razred treći a njegova donja granica L_1 = 1500. Frekvencija medijalnog razreda f_{med} =22.70, a zbroj frekvencija do medijalnog razreda $\sum f_1$ = 43.68. Veličina medijalnog razreda iznosi i = 500. Medijan je :

$$Me = L_1 + \frac{N/2 - \sum f_1}{fmed} * i = 1500 + \frac{50 - 43.68}{22.70} * 500 = \quad Me = 1.639.21$$

Prvih 50 % osoba ima mirovinu 1639.21 kn i manje,a drugih 50 % ima mirovinu 1639.21 kn i više.

3.1.3. ARITMETIČKA SREDINA

Aritmetička sredina je najvažnija srednja vrijednost i najčešće se koristi. Pripada skupini potpunih srednjih vrijednosti jer se izračunava na osnovi svih vrijednosti numeričkog niza.
Samo računanje aritmetičke sredine nije zamršeno, a manje razlike u postupku računanja mogu se uočiti ovisno o tome je li riječ o pojedinačnim, odnosno o *negrupiranim* ili o *grupiranim podacima.*

ARITMETIČKA SREDINA – omjer vrijednosti numeričkog niza i brojeva članova niza
- prosjek određenog statističkog niza

Aritmetička sredina negrupiranih podataka dana je izrazom :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i$$

Primjer 3 :

Dnevna prodaja šećera u lancu robnih kuća tijekom jedne dekade bila je (u kg):
347 272 578 436 632 496 456 726 374 498

Prosječna dnevna prodaja aritmetička je sredina niza, odnosno zbroj vrijednosti prodaje podijeljen sa 10, to jest :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i = \frac{1}{10}(347 + 272 + ... + 498) = 481.5 \qquad \bar{x} = 481.5$$

Aritmetička sredina grupiranih podataka računa se u obliku ponderirane sredi e, a njezina je vrijednost dana izrazom :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum fixi \;, \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum P_i x_i \;, \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum p_i x_i$$

Primjer 4 :

Tabela 4. Struktura zaposlenih prema navršenim godinama starosti :

Godine života	Struktura P_i	Razredna sredina x_i	$P_i x_i$	Veličina razreda i_i
15 – 25	9.52	20.0	190.4	10
25 – 50	67.06	37.5	2514.75	25
50 – 65	20.61	57.5	1185.075	15
65 i više	2.81	72.5	203.725	15
ukupno	100.00	-	4093.95	-

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum P_i x_i = \frac{1}{100} 4093.95 = \frac{4093.95}{100} = 40.9395 \qquad \bar{x} = 40.9395$$

Prosječna starosna dob zaposlenih iznosila je 40.94 godine.

3.1.4. GEOMETRIJSKA SREDINA

GEOMETRIJSKA SREDINA – konstanta koja se računa uporabom svih vrijednosti niza

- rabi se u poslovnoj statistici pri računanju prosjeka pokazatelja relativnih promjena

Njome se, primjerice, izračunava prosječna stopa promjene pojave u vremenu. Geometrijska sredina se izračunava kao N-ti korijen iz umnoška numeričke varijable :

$$G = \sqrt[N]{x_1 x_2 \ldots . x_N}$$

Primjer 5:

Varijabla x poprima vrijednosti x_i : 5 7 9 8 16 100

$$G = \sqrt[6]{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 100} = \sqrt[6]{4032000} \qquad G = 12.61595$$

3.1.5. HARMONIJSKA SREDINA

HARMONIJSKA SREDINA – broj jednak recipročnoj vrijednosti aritmetičke sredine recipročnih vrijednosti numeričke varijable

Harmonijska sredina je broj određen izrazom :

$$H = \frac{N}{\sum \frac{1}{x_i}} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_N}}$$

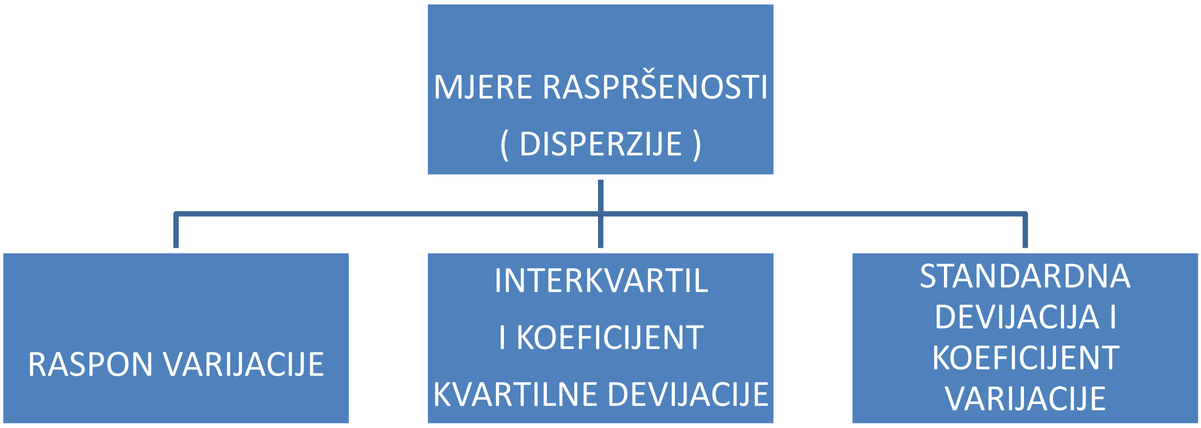
Primjer 6 :

Dane su vrijednosti numeričke varijable x : 7, 3, 8, 6, 2, 5

$$H = \frac{N}{\sum \frac{1}{x_i}} = \frac{6}{\frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}}, \quad H = 4.088$$

3.2. MJERE RASPRŠENOSTI (DISPERZIJE)

Mjerama raspršenosti mjeri se stupanj varijabilnosti istovrsnih podataka, a ubrajaju se među najvažnije statističko-analitičke veličine.
Postoji više mjera a njihov izbor ovisi o vrsti podataka, odnosno o vrsti varijable.
One se mogu izraziti u mjernim jedinicama varijable ili u relativnom iznosu.Kao i srednje vrijednosti, računaju se uporabom dijela podataka ili svih podataka.
Najvažnije mjere disperzije naznačena su na slici :



3.2.1 RASPON VARIJACIJE

Raspon je uvijek izražen u mjernim jedinicama varijable. Raspon varijacije često se primjenjuje u praćenju varijacija cijena roba i usluga, cijena vrijednosnica na financijskom tržištu, tečaja valuta i dr.

U burzovnim izvješćima, na primjer, navode se najviša i najniža cijena a njihova razlika upućuje na raspon varijacije.Uz najvišu i najnižu cijenu često se daje i zadnja cijena.

Raspon varijacije vrijednosti numeričke varijable x jednak je razlici njezine najveće i najmanje vrijednosti, tj.:

$$\mathrm{R}_x = x_{\max.} - x_{\min.}$$

Primjer 7 :

Tabela 5. Poslovanje vrijednosnicama tvrtke KRAŠ na ZSE :

KRAS-R-A			
Zadnja	Najviša	Najniža	Raspon
440.00	440.00	426.00	14.00
430.01	439.00	430.01	8.99
427.01	435.00	427.01	7.99
430.00	430.00	427.02	2.98

3.2.2 INTERKVARTIL

Izostavi li se prva i posljednja četvrtina članova uređenog niza vrijednosti numeričke varijable, ostaje središnjih 50 posto podataka, odnosno podaci između prve i posljednje četvrtine.

INTERKVARTIL – raspon varijacije središnjih pedeset posto vrijednosti numeričke varijable

Interkvartil dan je izrazom :

$$\mathrm{I}_Q = Q_3 - Q_1$$

,odnosno koeficijent kvartilne devijacije :

$$\mathrm{V}_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}\ , \quad 0 \le V_Q \le 1$$

Da bi se odredio interkvartil najprije je potrebno utvrditi vrijednost **donjeg i gornjeg kvartila**.

Donji kvartil (Q_1) dijeli uređeni niz na dva dijela i to tako da je prva četvrtina (25 %) članova niza s vrijednosti manjom od donjeg kvartila.
Preostale, posljednje tri četvrtine članova niza (75 %) imaju vrijednost veće od donjeg kvartila.
Gornji kvartil (Q_3) dijeli uređeni niz na dva dijela, i to tako da je posljednja četvrtina članova (25 %) ima vrijednost veću od gornjeg kvartila.

Donji kvartil dan je izrazom :

$$\boxed{Q_1 = L_1 + \frac{\frac{N}{4} - \sum f_1}{f_{k\,\mathrm{var}}} \cdot i}$$

Gornji kvartil dan je izrazom :

$$\boxed{Q_3 = L_1 + \frac{\frac{3N}{4} - \sum f_1}{f_{k\,\mathrm{var}}} \cdot i}$$

Da bi se izračunali kvartili, potrebno je najprije formirati kumulativni niz, a zatim utvrditi kvartilni razred.
Kvartilni razred je onaj razred čija kumulativna frekvencija prvi put obuhvati vrijednost N/4, odnosno 3N/4, gdje je N zbroj frekvencija.

Primjer 8 :

Tabela 6. Struktura (u %) zaposlenih u djelatnosti vađenja sirove nafte prema prema prosječnoj mjesečnoj plaći u RH u ožujku 2002.

Plaća	Struktura (u %)	Kumulativni niz	Veličina razreda
1800.5 - 2700.5	4.2	4.2	900
2700.5 - 3000.5	5.5	9.7	300
3000.5 - 3500.5	14.3	24.0	500
3500.5 - 4000.5	20.3	44.3	500
4000.5 – 4500.5	28.5	72.8	500
4500.5 – 5000.5	9.6	82.4	500
5000.5 – 7000.5	15.1	97.5	2000
7000.5 – i više	2.5	100.0	(8000)
ukupno	100.0		

Izvor : Statistički ljetopis RH, 2003

Kako je N = 100, zbroj frekvencija (N/4) =25, kvartilni je razred 3500.5 – 4000.5. Donja mu je granica 3500.5, frekvencija 20.3. Zbroj frekvencija do kvartilnog razreda iznosi 24.0, anjegova je veličina 500. Donji je kvartil :

$$\mathrm{Q}_1 = L_1 + \frac{\frac{N}{4} - \sum f_1}{f_{k\,\mathrm{var}}} \cdot i \;=\; 3500.5 + \frac{25-24}{20.3} \cdot 500 \qquad \mathrm{Q}_1 = 3525.13$$

Elementi su za određivanje gornjeg kvartila : (3N/4) = 75, kvartilni razred 4500.5 – 5000.5, donja granica je 4500.5, frekvencija 9.6. Zbroj frekvencija do kvartilnog razreda iznosi 72.8, a njegova je veličina 500.Gornji kvartil je :

$$\mathrm{Q}_3 = L_1 + \frac{\frac{3N}{4} - \sum f_1}{f_{k\,\mathrm{var}}} \cdot i \;=\; 4500.5 + \frac{75-72.8}{9.6} \cdot 500 \qquad \mathrm{Q}_3 = 4615.08$$

Interkvartil i koeficijent kvartilne devijacije jesu :

$$\mathrm{I}_Q = Q_3 - Q_1 \;=\; 4615.08 – 3525.13 \qquad \mathrm{I}_Q = 1089.95$$

$$\mathrm{V}_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \;=\; \frac{1089.95}{8140.21} \qquad \mathrm{V}_Q = 0.1338970$$

Donji kvartil pokazuje da je plaća prvih 25 % zaposlenih 3525.13 kn, i manja. Gornji kvartil je 4615.08 kn, što pokazuje da posljednjih 25 % zaposlenih ima veću plaću od spomenute. Interkvartil pokazuje da je raspon plaća središnjih 50 % zaposlenih 1089.95 kn, a izražen relativno 0.1338970, ili 13.4 % (koeficijent kvartilne devijacije). Raspršenost plaća središnjih 50 % zaposlenika je mala.

3.2.3. STANDARDNA DEVIJACIJA

STANDARDNA DEVIJACIJA – prosječno odstupanje vrijednosti numeričke varijable od njezine aritmetičke sredine, a izražena je u istim mjernim jedinicama kao i varijabla

Kako je standardna devijacija mjera raspršenosti izražena u mjernim jedinicama vrijednosti niza, stupanj raspršenosti različitih nizova uspoređuje se s *koeficijentom varijacije.*
S obzirom na svojstva intervalne ljestvice, za podatke mjerene na intervalnoj ljestvici ne računa se koeficijent varijacije.

Standardna devijacija dana je izrazom:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum f_i x_i\right)^2}{N}}$$

, a koeficijent varijacije :

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100$$

Primjer 9 :

Tabela 7. Narudžbe prema vrijednosti robe u eurima

Vrijednost narudžbi	Broj narudžbi f_i	Razredna sredina x_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
100 – 150	20	125	2 500	312 500
150 – 200	148	175	25 900	4 532 500
200 – 250	237	225	53 325	11 998 125
250 – 350	112	300	33 600	10 080 000
350 – 500	96	425	40 800	17 340 000
500 - 700	80	600	48 000	28 800 000
ukupno	693	-	204 125	73 063 125

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^{\,2} - \frac{1}{N}\left(\sum f_i x_i\right)^2}{N}} = \sqrt{\frac{73063125 - \frac{1}{693}\cdot 204125^2}{693}} \qquad \sigma = 136.63425$$

Aritmetička sredina narudžbi je :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum fixi = \frac{1}{693}\cdot 204125 \qquad \bar{x} = 294.55267$$

Kada su nam poznate vrijednosti, možemo izračunati koeficijent varijacije :

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}\cdot 100 = \frac{136.63425}{294.55267}\cdot 100 \qquad V = 46.39\ \%$$

Prosječna vrijednost narudžbi iznosila je 294.55 eura, a prosječno je odstupanje iznosilo 136.63 eura, ili 46.39 %. Riječ je o povećanoj disperziji vrijednosti narudžbi prema prosječnoj vrijednosti narudžbi.

3.3. MJERE ASIMETRIJE

Osim srednjih vrijednosti i mjera stupnja promjenjivosti, u analizi statističkih nizova rabe se i druge mjere, primjerice *mjere asimetrije*.
One upućuju na *način rasporeda podataka* prema aritmetičkoj sredini ili prema nekoj drugoj srednjoj vrijednosti.
Najvažnija mjera asimetrije za numeričke nizove je **koeficijent asimetrije.**

3.3.1. KOEFICIJENT ASIMETRIJE

KOEFICIJENT ASIMETRIJE – mjera kojom se brojčano izražava način rasporeda podataka prema aritmetičkoj sredini

Uobičajeno poprima vrijednost iz intervala od -2 do +2, a može biti i veći.
Za simetrične rasporede podataka jednak je nuli.

Koeficijent asimetrije dan je izrazom :

$$\boxed{\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}\ ,\quad \mu_3 = \frac{1}{N}\sum f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^3}$$

Primjer 10.

U primjeru 9. navedena je distribucija narudžbi prema vrijednosti robe.Za tu distribuciju izračunata je i prosječna vrijednost narudžbi $\bar{x}$ = 294.55267, i prosječno odstupanje od prosječne vrijednosti narudžbe σ = 136.63425.
Određuje se koeficijent asimetrije :

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \;,\; \mu_3 = \frac{1}{N}\sum f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^3$$

Vrijednost narudžbi	Broj narudžbi f_i	x_i	$(x_i - \bar{x})^3$	$f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^3$
100 – 150	20	125	- 4 874 318.45	- 97 486 369
150 – 200	148	175	- 1 708 747.29	-252 894 598.92
200 – 250	237	225	- 336 466.18	- 79 742 484.66
250 – 350	112	300	161.64	48 492
350 – 500	96	425	2 219 757.76	213 096 744.96
500 - 700	80	600	28 497 646.80	2 279 811 744
ukupno	693	-		2 062 833528.38

$$\mu_3 = \frac{1}{693}\cdot 2062833528.38 \qquad \mu_3 = 2976671.758$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{2976671.758}{136.63425^3} = \frac{2976671.758}{2550813.647} \qquad \alpha_3 = 1.167$$

3.3.2 PEARSONOVA MJERA ASIMETRIJE

Osim koeficijenata, u analizi nizova rabi se i Pearsonova mjera asimetrije koja se temelji na odnosima srednjih vrijednosti.
Uobičajeno poprima vrijednost iz intervala ± 3.

Pearsonova mjera asimetrije dana je izrazom :

$$\boxed{S_k = \frac{\left(\bar{x} - Mo\right)}{\sigma}}$$

Primjer 11.

Na temelju prethodnog primjera 10.(9.) poznata je aritmetička sredina $\bar{x}$ = 294.55267, te standardna devijacija σ = 136.63425. Da bismo izračunali izraz, potrebno je izračunati i dominantnu srednju vrijednost (mod). M_o = 216.48.
Pearsonova mjera asimetrije iznosi :

$$S_k = \frac{(\bar{x} - Mo)}{\sigma} = \frac{294.55267 - 216.48}{136.63425} = \quad S_k = 0.571$$

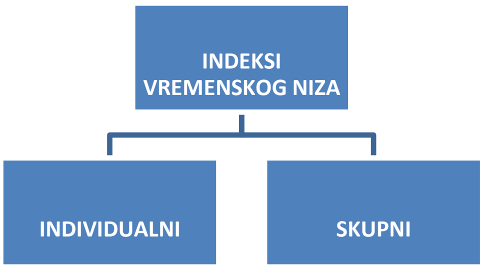
4. VREMENSKI NIZOVI

Vremenski statistički niz nastaje kronološkim navođenjem podataka o različitim pojavama koje se odnose na dva ili više razdoblja.
Najčešće je riječ o podacima povezanih s uzastopnim jednakim intervalima vremena ili jednako udaljenim vremenskim točkama.
Za razliku od već predočenih nizova, za vremenske nizove bitan je *vremenski poredak* podataka.

Vremenski niz čine kronološki sređene vrijednosti pojave y1, y2,...yN.
Niz je intervalni ako se vrijednosti odnose na vremenski interval. Niz je trenutačni kada članovi niza pokazuju stanje pojave u vremenskim točkama.
Broj članova niza N predočuje njegovu dužinu.

4.1. INDEKSI VREMENSKOG NIZA

Indeksi vremenskog niza relativni su brojevi koji izražavaju odnos stanja jedne pojave ili skupine pojava u različitim razdobljima ili vremenskim točkama.



Individualnim indeksima prati se u vremenu razvoj jedne pojave.
Skupnim indeksima prati se razvoj skupine pojava koje čine logičnu cjelinu.

4.1.1 INDIVIDUALNI INDEKSI

Individualni indeksi pojavljuju se u dva oblika, i to kao **verižni indeksi** i **indeksi na stalnoj osnovici**. Osnovni su brojčani pokazatelji koji se rabe u analizi vremenskog niza.

Verižni indeksi

Verižni indeks izračuna se tako da se druga vrijednost niza podijeli s prvom vrijednošću, a zatim pomnoži sa 100, treća se vrijednost podijeli s drugom vrijednošću u nizu, zatim pomnoži sa 100, i tako redom – vrijednost N-tog razdoblja podijeli se s vrijednošću razdoblja (N-1) i dobiveni omjer pomnoži sa 100.

Ako su $y_1, y_2, ... y_t, .. y_N$ članovi vremenskog niza, verižni su indeksi dani izrazom :

$$V_2 = \frac{y_2}{y_1} \cdot 100, V_3 = \frac{y_3}{y_2} \cdot 100 \quad \text{to jest :} \quad V_t = \frac{y_t}{y_{t-1}} \cdot 100 \qquad t = 2, 3, \ldots, N$$

Verižni indeks pokazuje koliko jedinica pojave u razdoblju *t* dolazi na svakih sto jedinica pojave u razdoblju (t-1).
Oduzme li se od verižnog indeksa 100, razlika upućuje na relativnu postotnu promjenu pojave u uzastopnim razdobljima. Iznos te promjene naziva se **stopom promjene.**

Stopa promjene dana je izrazom : $s_t = V_t - 100$

Primjer 12 :

Tablica 8. Broj nezaposlenih u RH u razdoblju 1999 – 2004

Godina	Broj nezaposlenih y_t	Verižni indeksi V_t	Stope $s_t = V_t - 100$
1999.	321 866	-	-
2000.	357 872	111.19	11.19
2001.	380 195	106.24	6.24
2002.	389 741	102.51	2.51
2003.	329 799	84.62	-15.38
2004.	340 000	103.09	3.09

$$V_2 = \frac{y_2}{y_1} \cdot 100 = \frac{357872}{321866} \cdot 100, = 111.19, \ldots, \quad V_6 = \frac{340000}{329799} \cdot 100, V_6 = 103.09$$

$$s_2 = V_2 - 100 = 111.19 - 100 = 11.19, \ldots, s_6 = V_6 - 100 = 103.09 = 3.09$$

Verižni indeks 111,19 pokazuje da je na svakih 100 nezaposlenih u 1999. dolazilo (zaokruženo) 111 nezaposlenih u 2000. ili 111,19% više, koliko iznosi i pripadajuća stopa promjene. Na postotnu promjenu upućuje stopa promjene, koja se izvodi iz verižnog indeksa.

U poslovnoj i gospodarskoj analizi osim pojedinačnih stopa promjene, kojih ima N-1, upotrebljava se prosječna veličina, koja se naziva **prosječnom stopom promjene.**
Prosječna stopa promjene dana je izrazom:

$$\bar{s} = \left(\sqrt[N-1]{\frac{y_N}{y_1}} - 1 \right) \cdot 100$$

Prosječna stopa je konstanta kojom se zamjenjuje niz pojedinačnih stopa.Taj pokazatelj govori o *prosječnim postotnim promjenama pojave u uzastopnim razdobljima.*

Prosječna stopa, odnosno geometrijska sredina može se iskoristiti za *predviđanje* razine pojave za razdoblja nakon posljednjega u nizu. Procjenjuje se razina pojave za jedno, dva ili općenito τ (tau) razdoblja nakon N-tog razdoblja.

Procijenjena razina pojave τ razdoblja nakon N-tog jest:

$$\hat{y}_{N+\tau} = y_N G^{\tau}, \qquad G = \sqrt[N-1]{\frac{y_N}{y_1}}$$

Primjer 12.

Tablica 9. Podaci o profitu nakon oporezivanja tvrtke Market

Godina	2001.	2002.	2003.	2004.	2005.
Profit (000)	646	691	732	791	850
Stope (%)	-	6.97	5.93	8.06	7.46

Izračunane stope upućuju na promjene profita u postotnom iznosu u uzastopnim razdobljima. Prosječna je stopa :

$$\bar{s} = \left(\sqrt[N-1]{\frac{y_N}{y_1}} - 1\right)\cdot 100 = \left(\sqrt[5-1]{\frac{850}{646}} - 1\right)\cdot 100 = (1.071018 - 1)100, \qquad \bar{s} = 7.1018$$

Prosječna je stopa promjene (zaokruženo) 7.1 %. Tumači se ovako : u razdoblju 2001. – 2005. profit se povećavao u uzastopnim razdobljima prosječno godišnje 7.1 %.

Prognoza profita izrazom $\hat{y}_{N+\tau} = y_N G^{\tau}$, $G = \sqrt[N-1]{\frac{y_N}{y_1}}$, N = 5,

$y_N = y_5 = 850$, G = 1.071018

Prognoza profita po godinama :

2006, $\tau = 1$, $\hat{y}_{5+1} = y_5 G^1 = 850 * 1.071018$ $\hat{y}_6 = 910$

2007, $\tau = 2$, $\hat{y}_{5+2} = y_5 G^2 = 850 * 1.071018^2$ $\hat{y}_7 = 975$

2008, $\tau = 3$, $\hat{y}_{5+3} = y_5 G^3 = 850 * 1.071018$