ŠKOLA ZA CESTOVNI PROMET
Zagreb

NASTAVNO PISMO
ZA PROGRAME OBRAZOVANJA ODRASLIH

Nastavni predmet:

MATEMATIKA

3. RAZRED

Zanimanje:

VOZAČ MOTORNOG VOZILA

Autor: Marija Mlinarević, prof.

Zagreb, 2010.

KAKO KORISTITI NASTAVNO PISMO

Cijenjeni polaznici,

Svrha nastavnog pisma je olakšati Vam organizaciju samostalnog učenja, pripremanje i polaganje ispita te uspješno završavanje upisanog programa.

Na početku nastavnog pisma nalazi se sadržaj koji daje najkraći uvid u strukturu teksta, odnosno orijentacijski uvid u nastavne cjeline i jedinice koje su razrađene u nastavnom pismu i s kojima ćete se upoznati.

U razradi nastavnih cjelina definirani su novi pojmovi i objašnjena pravila i postupci koje koristimo u rješavanju zadataka. Slijedi niz detaljno objašnjenih primjera, popraćenih skicama i slikama, kroz koje uvježbavamo uvedeno. Pojmovi i pravila koje uvodimo, zbog lakšeg i bržeg snalaženja, istaknuti su na marginama. Prilikom učenja na margine možete zapisivati svoje osobne bilješke jer je nastavno pismo zamišljeno kao radni udžbenik.

Iza svake nastavne cjeline nalaze se zadaci za vježbu koje je dobro riješiti nakon proučenih primjera, posebno zato što se slični zadaci pojavljuju na ispitu. Na samome kraju nastavnog pisma nalazi se primjer ispita koji će Vam poslužiti za uvježbavanje gradiva i završnu samoprovjeru znanja. Sretno!

SADRŽAJ

1. POSTOTNI I PROMILNI RAČUN, RAČUN SMJESE, JEDNOSTAVNI KAMATNI RAČUN

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. *Koja je formula postotnog, promilnog, kamatnog i računa smjese?*
2. *Kako vješto koristiti naučeno u situacijama svakodnevnog života? Gdje nam sve pomaže znanje o postocima, kamatnom računu i računu smjese?*

1.1. POSTOTNI RAČUN

Postotak je razlomak s nazivnikom 100, tj. razlomak oblika $\frac{p}{100}$.

postotak

Razlomak $\frac{p}{100}$ piše se $p\%$ i čita „pe posto".

Primjer 1. Napišimo u obliku postotka:

a) $\frac{7}{100}=7\%$,

b) $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}=10\%$,

c) $\frac{2}{5}=\frac{40}{100}=40\%$,

d) $0.93=\frac{93}{100}=93\%$.

Ilustrirat ćemo kako se postoci upotrebljavaju u praktičnim primjerima. U rješavanju zadatak koristit ćemo **formulu postotnog računa**.

formula postotnog računa

Za zadani broj p, $p>0$ je $p\%(x)=\frac{p}{100}\cdot x$ što zapisujemo i:

$$y=\frac{p}{100}\cdot x,$$

odnosno

$$y=p\%(x),$$

gdje je p **postotak**, x **osnovna vrijednost**, a y **postotni iznos**.

Primjer 2. Cijena nekog proizvoda iznosila je 3750 kn. Tom je proizvodu cijena snižena 8%. Kolika je cijena tog proizvoda nakon sniženja?

Računamo koliko je 8% od broja 3570: $\frac{8}{100}\cdot 3570=300$.

Prema tome cijena je snižena 300 kn, dakle cijena nakon sniženja je 3450 kn.

Primjer 3. U nekoj školi s 1250 učenika pozitivnu ocjenu iz matematike na kraju školske godine imalo je 1185 učenika. U drugoj školi s 900 učenika matematiku nije položilo 45 učenika. U kojoj je školi bio bolji uspjeh iz matematike?

Računamo postotak prolaznosti u obje škole primjenom formule postotnog računa ako je zadana osnovna vrijednost i postotni iznos. U prvoj školi matematiku je položilo $\frac{1185 \cdot 100}{1250} = 94.8\%$ učenika.
U drugoj školi matematiku je položilo $900 - 45 = 855$ učenika što je $\frac{855 \cdot 100}{900} = 95\%$. Zaključujemo da je uspjeh iz matematike bio bolji u drugoj školi.

Primjer 4. Trgovački putnik osim plaće i plaćenog prijevoza dobije proviziju od 3.5% po narudžbi. Koliku je narudžbu ima trgovački putnik u jednom mjesecu ako mu je provizija bila 420 kn?

Primjenom formule postotnog računa, izračunajmo osnovnu vrijednost ako je zadan postotak i postotni iznos: $\frac{420 \cdot 100}{3.5} = 12000$.
Trgovački putnik imao je narudžbu u vrijednosti 12000 kn.

Primjer 5. Prilikom prženja kava gubi 12% svoje mase. Koliko treba sirove kave ako želimo dobiti 2.2 t pržene kave?

Označimo sa x masu sirove kave. Prema uvjetu zadatka imamo:

$$x - 12\%(x) = 2.2$$
$$x - \frac{12}{100} \cdot x = 2.2$$
$$x - 0.12x = 2.2$$
$$0.88x = 2.2$$
$$x = 2.5$$

Potrebno je 2.5 tona sirove kave.

1.2. PROMILNI RAČUN

Promil je razlomak s nazivnikom 1000, tj razlomak oblika $\frac{p}{1000}$. ***promil***

Razlomak $\frac{p}{1000}$ piše se p‰ i čita „pe promila“.

Primjer 1. Napišimo u obliku promila:

a) $\frac{17}{1000} = 17$ ‰,

b) $\frac{9}{100} = \frac{90}{1000} = 9$ ‰,

c) $\frac{3}{5}=\frac{600}{1000}=600\,‰$,

d) $0.123=\frac{123}{1000}=123\,‰$.

Ilustrirat ćemo kako se postoci upotrebljavaju u praktičnim primjerima. U rješavanju zadatak koristit ćemo **formulu promilnog računa**.

Za zadani broj p, $p>0$ je $p‰(x)=\frac{p}{1000}\cdot x$ što se zapisuje i:

$$y=\frac{p}{1000}\cdot x\,,$$

formula promilnog računa

odnosno

$$y=p\,‰(x)\,,$$

gdje je p **promil**, x **osnovna vrijednost**, a y **promilni iznos**.

Primjer 2. Broj stanovnika se u nekom gradu, u odnosu na prošlu godinu povećao se $5‰$ i sada iznosi 5040. Koliki je prirast stanovništva bio ove godine?

Označimo sa x broj stanovnika u prošloj godini. Prema uvjetu zadatka imamo:

$$x+5\,‰(x)=5040$$
$$x+\frac{5}{1000}\cdot x=5040$$
$$x+0.005x=5040$$
$$1.005x=5040$$
$$x=5014.93$$

$5040-5014.93=25.07$ pa je grad dobio 25 novih stanovnika.

1.3. RAČUN SMJESE

U praksi se često susrećemo s problemom miješanja dviju ili više tvari pod određenim uvjetima. Ako uvedemo oznake:

x … masa (volumen) prve tvari koje miješamo
y … masa (volumen) druge tvari koje miješamo
$x+y$ … masa mješavine
a … svojstvo (cijena, gustoća, temperatura, kiselost, postotak alkohola, slanost, čistoća i dr.) prve tvari
b … svojstvo druge tvari
c … svojstvo mješavine

tada je **formula računa smjese**:

$$c=\frac{a\cdot x+b\cdot y}{x+y}\,.$$

formula računa smjese

Primjer 1. Koliki je postotak alkohola koji se dobije miješanjem 20 litara 90%-tnog alkohola i 30 litara 40%-tnog alkohola?

Ispišemo li podatke prema uvedenim oznakama: $x = 20$, $a = 90$, $y = 40$ i $b = 40$, dobivamo: $c = \frac{90 \cdot 20 + 40 \cdot 30}{50} = 60$, tj. dobije se 50 litara 60%-tnog alkohola.

Primjer 2. Morska voda sadrži 3% soli. Koliko litara slatke vode treba dodati u 40 litara morske vode da bi slanost mješavine bila 2%?

Sada imamo $x = 40$, $a = 3$, $b = 0$ i $c = 2$. Uvrštavanjem u formulu računa smjese dobivamo:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{3 \cdot 40 + 0 \cdot y}{40 + y} \\ 2 \cdot (40 + y) &= 120 \\ 2y &= 40 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

Treba dodati 20 litara slatke vode.

Primjer 3. Od srebra čistoće 550‰ i čistoće 880‰ potrebno je napraviti medalju mase 132 grama čistoće 750‰. Koliko je potrebno srebra i koje čistoće da se udovolji narudžbi?

$a = 550$, $b = 880$, $c = 750$ i $x + y = 132$. Uvrštavanjem u formulu računa smjese dobivamo:

$$750 = \frac{550 \cdot x + 880 \cdot y}{132},$$

Što zajedno s $x + y = 132$ daje sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} x + y = 132 \\ 750 = \dfrac{550x + 880y}{132} \end{cases}.$$

Rješenje sustava je $x = 52$ i $y = 80$.
Potrebno je 52 g srebra čistoće 550‰ i 80 g srebra čistoće 880‰.

1.4. JEDNOSTAVNI KAMATNI RAČUN

Poznato je da banka svojim štedišama na uloženi novac nakon određenog vremena isplaćuje kamate. Ako se od banke uzima zajam (kredit), onda dužnik, osim posuđenog iznosa novca, treba vratiti i kamate. Iznos novca uložen na štednju ili, pak, iznos posuđenog zajma naziva se **glavnica** ili **kapital**.

glavnica

Kamata je iznos u novcu koji dužnik na pozajmljenu glavnicu razmjerno duljini razdoblja na koje je glavnica vezana.

kamata

Omjer kamate i glavnice vezane na neku jedinicu vremena izražen u postocima naziva se **kamatna stopa** ili **kamatnjak**. Ako se uz kamatnu stopu ne naglasi razdoblje na koje se ta stopa odnosi, uzima se da je ono godinu dana.

kamatna stopa

Uobičajeno je da se glavnica ili kapital označi sa c, kamatna stopa s p, vrijeme u godinama s n i kamata s k. Uz ove oznake, formula za izračunavanje kamata glasi:

$$k = \frac{c \cdot p \cdot n}{100}.$$

formula jednostavnog kamatnog računa

To je osnovna **formula jednostavnog kamatnog računa**. Jednostavne kamate računaju se uvijek od iste (neuvećane) glavnice za cijelo vrijeme ugovora.

U praksi se jednostavni kamatni račun obično primjenjuje na razdoblje manje od jedne godine.

Vrijeme može biti izraženo u mjesecima m ili danima d.

Ako vrijeme mjerimo u mjesecima i znamo da je 1 mjesec $= \frac{1}{12}$ godine, iz osnovne formule dobivamo da je kamata za m mjeseci:

$$k = \frac{c \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12}.$$

Ako vrijeme mjerimo u danima i znamo da je 1 dan $= \frac{1}{365}$ godine, iz osnovne formule dobivamo da je kamata za d dana:

$$k = \frac{c \cdot p \cdot d}{100 \cdot 365}.$$

Primjer 1. Koliki ćemo iznos podignuti nakon prestanka štednje ako smo na štednju od 8 mjeseci uložili 8400 kuna uz 4.5% kamata godišnje?

Zadano je vrijeme u mjesecima $m = 8$, kamatna stopa $p = 4.5$ te glavnica $c = 8400$. Prema formuli jednostavnog kamatnog računa računamo kamate na uloženi iznos:

$$k = \frac{c \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12} = \frac{8400 \cdot 4.5 \cdot 8}{100 \cdot 12} = 252.$$

Nakon prestanka štednje podignuto je ukupno $8400 + 252 = 8652$ kuna.

Primjer 2. Kolike će kamate donijeti novčani iznos od 9300 kuna za razdoblje od $11.$ ožujka do $15.$ svibnja uz kamatnu stopu 7%?

Od $11.03.$ do $25.05.$ imamo 65 dana pa je:

$$k = \frac{c \cdot p \cdot d}{100 \cdot 365} = \frac{9300 \cdot 7 \cdot 65}{100 \cdot 365} = 116.$$

Na uloženi iznos uz danu kamatnu stopu dobivamo 116 kuna kamata.

Primjer 3. Koju glavnicu moramo uložiti u banku da, uz kamatnu stopu 8%, za četiri mjeseca dobijemo 168 kuna kamata?

Iz $k=\frac{c\cdot p\cdot m}{100\cdot 12}$ dobivamo $c=\frac{k\cdot 100\cdot 12}{p\cdot m}=\frac{168\cdot 100\cdot 12}{8\cdot 4}=6300$. Dakle, moramo uložiti 6300 kuna.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. U proizvodnji neke robe ima 4% otpadaka.
   a) Ako je proizvedeno 52000 komada robe, koliko je otpadaka?
   b) Koliko komada te robe je proizvedeno ako je bilo 480 komada otpadaka?
2. a) Na CD-u kapaciteta 700Mb snimljeni su sadržaji od 139 Mb i 435 Mb. Koliki je postotak CD-a iskorišten?
   b) Ruksak je stajao 300 kn. Koliko ga je platio Ivo nakon sniženja od 40%?
   c) Od 30 zadataka učenica je točno riješila 27 zadataka. Koliko je posto točno riješenih zadataka?
3. Trgovac je kupio kamion jabuka za 52470 kuna. Trećinu jabuka prodao je uz zaradu 15%, četvrtinu uz zaradu 9%, šestinu uz zaradu 5%, a ostalo uz gubitak od 8%. Kolika je zarada tog trgovca?
4. U dvije se prodavaonice neki proizvod prodavao po cijeni 120 kuna. Nakon nekog vremena u prvoj je prodavaonici cijena povišena 11%, a zatim još 14%, a u drugoj je prodavaonici cijena odmah povišena 25%. Ima li razlike u cijeni i za koliko?
5. Koji broj umanjen za 17% daje 498?
6. Učenica je tijekom ljetnih praznika dobila 5% na težini i sada teži 63 kg. Koliko je učenica težila na kraju nastavne godine?
7. Da bi vlak nadoknadio kašnjenje, povećao je brzinu 20% pa je tada vozio 60 km/h. Kolika je bila njegova brzina prije povećanja brzine?
8. Bronca je legura bakra i kositra. Gustoća bakra je $\rho_{Cu}=8900$ kg/m³, a gustoća kositra je $\rho_{Sn}=7300$ kg/m³. Brončani spomenik ima masu od 1 tone. U spomenik je ugrađeno 740 kg bakra, a ostalo je kositar. Kolika je gustoća bronce?
9. Koliko litara vode temperature 10°C treba pomiješat i s 2 litre vode temperature 48°C ako želimo dobiti vodu temper ature 30°C?
10. Iz dvije vrste zlata čistoće 900 i 650 potrebno je načiniti smjesu zlata čistoće 750. Koliko grama je potrebno uzeti od svake vrste zlata?
11. Koliko postotnu kiselinu moramo pomiješati s 60 litara 50%-tne kiseline da bismo dobili 80 litara 55%-tne kiseline?
12. Miješanjem pšenice nepoznate cijene s 250 kg pšenice cijene 1.8 kn/kg dobili smo 1000 kg mješavine pšenice po cijeni 2.1 kn/kg. Izračunajte nepoznatu cijenu pšenice.
13. Ako danas u banku uložite 36500 kuna uz kamatnu stopu 6% i želite dobiti 738 kuna kamata, koji dan (datum) ćete moći podići kamate iz banke?
14. Koji iznos bismo morali 10. studenog uložiti u banku da bismo, uz kamatnu

stopu 4%, 5. travnja podigli 824 kuna kamata?

15. Odredi kamatnu stopu uz koju glavnica od 11980 kuna na 5 mjeseci donese 450 kuna kamata.

2. EKSPONENCIJALNE I LOGARITAMSKE FUNKCIJE

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. *Koju funkciju nazivamo eksponencijalnom, a koju logaritamskom? Koja su njihova svojstva?*
2. *Što su logaritmi i kako računamo s logaritmima?*

2.1. EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE

Eksponencijalna funkcija s bazom b jest realna funkcija oblika

$$f(x)=b^x,$$

gdje je $b>0$ i $b\neq 1$.

eksponencijalna funkcija

Primjeri eksponencijalnih funkcija su npr. funkcije:

$$f(x)=3^x,\ f(x)=10^x,\ f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x,\ f(x)=\sqrt{2}^x.$$

Primjere eksponencijalnih funkcija vežemo uz veličine koje jako brzo ili rastu ili padaju.
Svojstva eksponencijalnih funkcija analizirat ćemo iz njihovog grafa.

Primjer 1. Nacrtajmo grafove eksponencijalnih funkcija:

a) $f(x)=2^x$,

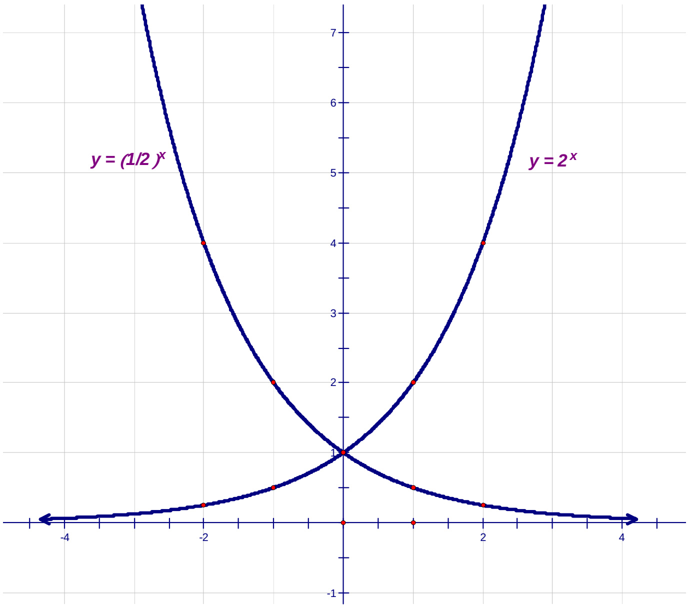
b) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Odredimo najprije nekoliko točaka traženih grafova:

x	0	1	2	-1	-2
$f(x)=2^x$	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

x	0	1	2	-1	-2
$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	2	4

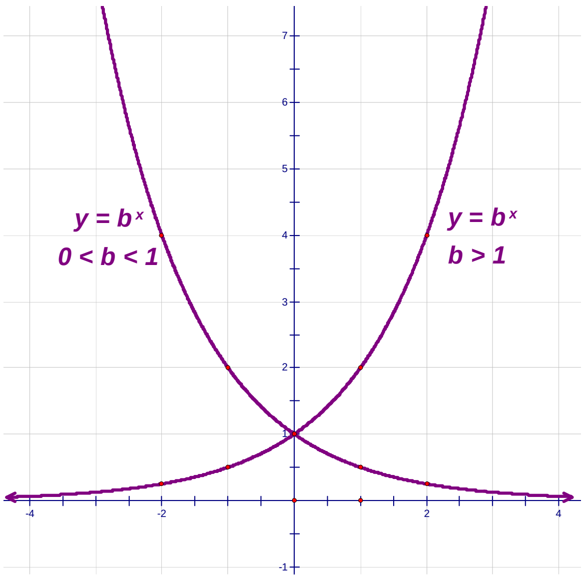
U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo sada grafove zadanih funkcija:



Zorni prikaz daje nam osnovna svojstva eksponencijalnih funkcija:

1. Područje definicije (domena) eksponencijalne funkcije $f(x)=b^x$ jest cijeli skup $\mathbf{R}$, a područje vrijednosti (kodomena) skup pozitivnih realnih brojeva $\mathbf{R}^+=\langle 0,+\infty\rangle$.
2. Eksponencijalna funkcija $f(x)=b^x$ za:
   a) $b>1$ raste, tj. za $x_1<x_2$ vrijedi $b^{x_1}<b^{x_2}$,
   b) $0<b<1$ pada, tj. za $x_1<x_2$ vrijedi $b^{x_1}>b^{x_2}$.
3. Graf $y=b^x$ siječe y-os u točki $(0,1)$.
4. Graf $y=b^x$ ne siječe x-os nego joj se asimptotski približava.

svojstva eksponencijalne funkcije



2.2. EKSPONENCIJALNE JEDNADŽBE

Jednadžba u kojoj se nepoznanica nalazi u eksponentu potencije naziva se **eksponencijalna jednadžba**.

eksponenci-jalna jednadžba

Tako je

$$3^x = 3^6$$

primjer eksponencijalne jednadžbe i njezino je rješenje očigledno: $x = 6$.

Ako eksponencijalnu jednadžbu možemo svesti na jednakost dviju potencija jednakih baza tj. na oblik:

$$b^{f(x)} = b^{g(x)},$$

pri čemu je $b > 0$ i $b \neq 1$, onda je

$$f(x) = g(x).$$

pravilo za rješavanje eksponenci-jalne jednadžbe

Dobivena jednadžba, koja je u našim primjerima linearna ili kvadratna, daje sva rješenja zadane eksponencijalne jednadžbe.

Primjer 1. Riješimo eksponencijalne jednadžbe:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1+2x} = \frac{9}{4}$

Zapišimo najprije lijevu i desnu stranu jednadžbe kao potencije s jednakom bazom:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1+2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}.$$

Slijedi:

$$1 + 2x = -2,$$

pa je

$$x = -\frac{3}{2}.$$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{7-x} = 25^{5x-2}$

I ovdje lijevu i desnu stranu jednadžbe zapisujemo u obliku potencija s jednakom bazom:

$$\left(5^{-1}\right)^{7-x} = \left(5^2\right)^{5x-2},$$

odnosno:

$$5^{-7+x} = 5^{10x-4}.$$

Slijedi:

$$-7 + x = 10x - 4,$$

pa je

$$x = -\frac{1}{3}.$$

c) $0.5 \cdot \sqrt[4]{8^{2x+3}} = 16^{-x+1}$

Kao i ranije, zapišimo lijevu i desnu stranu jednadžbe kao potencije s jednakom bazom:

$$2^{-1}\cdot\sqrt[4]{\left(2^{3}\right)^{2x+3}}=\left(2^{4}\right)^{-x+1},$$

odnosno:

$$2^{-1}\cdot 2^{\frac{6x+9}{4}}=2^{-4x+4}.$$

Množenjem potencija jednakih baza na lijevoj strani dobivamo:

$$2^{-1+\frac{6x+9}{4}}=2^{-4x+4}.$$

Slijedi:

$$-1+\frac{6x+9}{4}=-4x+4,$$

odnosno

$$-4+6x+9=-16x+16$$

pa je

$$x=\frac{1}{2}.$$

Primjer 2. Riješimo eksponencijalnu jednadžbu: $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-1}=21$.

Potencije koje se pojavljuju u jednadžbi nemaju jednake eksponente pa ih ne možemo oduzimati. Pokušajmo malo transformirati jednadžbu:

$$3^{x}\cdot 3-2\cdot 3^{x}\cdot\frac{1}{3}=21,$$

odnosno

$$3\cdot 3^{x}-\frac{2}{3}\cdot 3^{x}=21.$$

Sada potencije na lijevoj strani možemo oduzeti. Oduzimanjem dobivamo:

$$\frac{7}{3}\cdot 3^{x}=21$$

te je

$$3^{x}=9,$$

odnosno

$$3^{x}=3^{2}$$

pa je

$$x=2.$$

2.3. EKSPONENCIJALNE NEJEDNADŽBE

Sjetimo se svojstva eksponencijalne funkcije koje govori o njezinom rastu ili padu – eksponencijalna funkcija $f(x)=b^{x}$ za:

a) $b>1$ raste, tj. za $x_1<x_2$ vrijedi $b^{x_1}<b^{x_2}$,
b) $0<b<1$ pada, tj. za $x_1<x_2$ vrijedi $b^{x_1}>b^{x_2}$.

Zbog toga, očigledno vrijedi:

$$2^{9}<2^{13},\ 10^{3}<10^{7},\ \left(\frac{5}{2}\right)^{8}<\left(\frac{5}{2}\right)^{10}\ \text{te:}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^9 > \left(\frac{1}{2}\right)^{13}, \ 0.1^3 > 0.1^7, \ \left(\frac{2}{5}\right)^8 > \left(\frac{2}{5}\right)^{10}.$$

Ako eksponencijalnu nejednadžbu možemo svesti na oblik:

$$b^{f(x)} < b^{g(x)} \ (b^{f(x)} > b^{g(x)}),$$

onda za:

a) $b > 1$ vrijedi $f(x) < g(x)$ ($f(x) > g(x)$) ,

b) $0 < b < 1$ vrijedi $f(x) > g(x)$ ($f(x) < g(x)$),

pri čemu je $b > 0$ i $b \neq 1$.

pravilo za rješavanje eksponencijalne nejednadžbe

Primjer 1. Riješimo eksponencijalne nejednadžbe:

a) $2^{2x+3} > 4$

Slijedi

$$2^{2x+3} > 2^2.$$

Budući da je $b = 2 > 1$, dobivamo:

$$2x + 3 > 2$$

te je

$$x > -\frac{1}{2},$$

odnosno $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{9}\right)^5$

Slijedi

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{10}.$$

Budući da je $0 < b = \frac{1}{3} < 1$, dobivamo:

$$x < 10,$$

odnosno $x \in \langle -\infty, 10 \rangle$.

c) $0.1^{3x-2} < 1000$

Lijevu i desnu stranu nejednadžbe zapišimo kao potencije s jednakom bazom:

$$\left(10^{-1}\right)^{3x-2} > 10^3,$$

odnosno

$$10^{-3x+2} > 10^3$$

Budući da je $b = 10 > 1$, dobivamo:

$$-3x + 2 > 3$$

te je

$$x < -\frac{1}{3},$$

odnosno $x \in \left\langle -\infty, -\frac{1}{3} \right\rangle$.

2.4. LOGARITMI

U odjeljku 2.2. naučili smo rješavati neke jednostavnije eksponencijalne jednadžbe. Pogledajmo sada jednadžbu:

$$2^x = 5.$$

Budući da desnu stranu jednadžbe ne možemo zapisati kao potenciju s bazom 2, ovu jednadžbu ne možemo riješiti na način na koji smo eksponencijalne jednadžbe rješavali ranije. Da bismo riješili ovu i njoj slične jednadžbe, najprije moramo objasniti pojam logaritma.

Logaritam po pozitivnoj bazi b $(b \neq 1)$ pozitivnog broja y označavamo $\log_b y$. To je eksponent x sa svojstvom $b^x = y$. Dakle,

$$\log_b y = x \iff b^x = y,$$
$$b > 0,\ b \neq 1,\ y > 0,\ x \in \mathbf{R}.$$

logaritam

Riječima, logaritam pozitivnog broja y je eksponent x kojim treba potencirati poznatu bazu b da bi dobili potenciju y.

Slijedi da je rješenja jednadžbe iz uvoda $x = \log_2 5$. Približnu vrijednost realnog broja $\log_2 5$ naučit ćemo, uz formule za promjenu baze logaritma, računati na kalkulator. Ona iznosi, zaokružena na 5 decimala, 2.32193. Napravimo li provjeru, dobivamo: $2^{2.32193} = 5.0000066$.

Logaritam po bazi 10 nazivamo **dekadski logaritam** i označavamo $\log_{10} x = \log x$, a logaritam po bazi $e \approx 2.718281828459...$ nazivamo **prirodni logaritam** i označavamo $\log_e x = \ln x$.

dekadski logaritam

prirodni logaritam

Primjer 1. Odredimo x ako je:

a) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[5]{2} = x$

Po definicije logaritma vrijedi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt[5]{2},$$

pa je

$$2^{-x} = 2^{\frac{1}{5}}$$

iz čega je $x = -\frac{1}{5}$.

b) $\log_x \frac{1}{81} = -4$

Po definicije logaritma vrijedi:

$$x^{-4} = \frac{1}{81},$$

odnosno

$$x^{-4} = 3^{-4}$$

iz čega slijedi $x = 3$.

c) $\log_7 (3x-2) = 1$

Iz definicije logaritma slijedi:

$$7^1 = 3x - 2,$$

pa je

$$3x = 9$$

i $x = 3$.

Ovdje treba pripaziti na početni uvjet o kojemu će biti riječ u odjeljku *Logaritamske jednadžbe*. Po definiciji logaritma mora vrijediti $3x - 2 > 0$, odnosno $x > \frac{2}{3}$ što je ispunjeno.

Izravna posljedica gornjih formula su dvije formule bitne u računanju logaritama:

$$\log_b y = \log_b b^x = x \text{ i}$$

$$b^x = b^{\log_b y} = y.$$

Dakle,

$$\log_b b^x = x$$

i

$$b^{\log_b y} = y.$$

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$ (uočimo da do jednakog rezultata dolazimo postupimo li kao u primjeru 1. a)),

b) $\log_3 \frac{1}{27} = \log_{3-} 3^{-3} = 3$,

c) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$,

d) $\log_{\frac{1}{4}} 64 = \log_{\frac{1}{4}} 4^3 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = -3$,

e) $\log 100 = \log 10^2 = 2$,

f) $\log_7 7 = \log_7 7^1 = 1$,

g) $\log_5 1 = \log_5 5^0 = 0$.

Iz f) i g) dijela primjer 2. zaključujemo:

$$\log_b b = 1 \text{ jer je } b^1 = b$$

i

$$\log_b 1 = 0 \text{ jer je } b^0 = 1,$$

gdje je *b* pozitivan realan broj, $b > 0$ i $b \neq 1$.

Primjer 3. Izračunajmo:

a) $4^{\log_4 3} = 3$,

b) $25^{\log_5 2} = \left(5^2\right)^{\log_5 2} = \left(5^{\log_5 2}\right)^2 = 2^2 = 4$,

c) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\log_3 5} = \left(3^{-3}\right)^{-\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^3 = 5^3 = 125$.

Primjer 4. Izračunajmo:

$$\log_2 \frac{1}{64} - 7 \cdot \log_{11} 11 + \log_7 1 - 3 \cdot \log_{13} 13^{-4} = \log_2 2^{-6} - 7 \cdot 1 + 0 - 3 \cdot (-4) =$$
$$= -6 - 7 + 12 = -1.$$

2.5. PRAVILA ZA RAČUNANJE S LOGARITMIMA

Budući da su logaritmi eksponenti, pravila za računanje s potencijama mogu se iskazati i kao pravila za računanje logaritmima.

Neka je $m, n > 0$, $b > 0$ i $b \neq 1$. Tada vrijedi:

1. $\log_b (m \cdot n) = \log_b m + \log_b n$,
2. $\log_b \left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$,
3. $\log_b m^r = r \cdot \log_b m$.

pravila za računanje s logaritmima

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\log_{12} 3 + \log_{12} 4 = \log_{12} (3 \cdot 4) = \log_{12} 12 = 1$,

b) $\log_7 147 - \log_7 3 = \log_7 \frac{147}{3} = \log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$,

c) $\frac{\log_3 324}{2 + \log_3 2} = \frac{\log_3 16^2}{\log_3 8 + \log_3 2} = \frac{2 \cdot \log_3 16}{\log_3 16} = 2$,

d) $\frac{\log 108 + 3\log \frac{1}{3}}{\log 40 - \log 5} = \frac{\log 108 + \log\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\log \frac{40}{5}} = \frac{\log\left(108 \cdot \frac{1}{27}\right)}{\log 8} = \frac{\log 4}{\log 8} = \frac{\log 2^2}{\log 2^3} =$

$= \frac{2\log 2}{3\log 2} = \frac{2}{3}$.

Primjer 2. Primjenom pravila za računanje logaritmima zapišimo kao zbroj i/ili razliku logaritama pomnoženih realnim brojem:

a) $\log_5(x^2y^4)=\log_5 x^2+\log_5 y^4=2\log_5 x+4\log_5 y$,

b) $\log_2\frac{a^{10}}{b^5}=\log_2 a^{10}-\log_2 b^5=10\log_2 a-5\log_2 b$,

c) $\log_3\left(81\cdot\sqrt[5]{a^4b}\right)=\log_3 81+\log_3 a^{\frac{4}{5}}+\log_3 b^{\frac{1}{5}}=4+\frac{4}{5}\log_3 a+\frac{1}{5}\log_3 b$,

d) $\log\frac{1000a^9b^7}{c^5d^3}=\log\left(1000a^9b^7\right)-\log\left(c^5d^3\right)=$

$=\log 1000+\log a^9+\log b^7-\left(\log c^5+\log d^3\right)=$

$=3+9\log a+7\log b-5\log c-3\log d.$

U idućem primjeru, koji je važna priprema za rješavanje logaritamskih jednadžbi i nejednadžbi, pogledajmo drugi smjer primjene formula:

Primjer 3. Primjenom pravila za računanje logaritmima zapišimo pod jednim logaritmom i sredi izraz:

a) $4\log_3 x+5\log_3\sqrt[5]{y}=\log_3 x^4+\log_3\sqrt[5]{y}^5=\log_3\left(x^4y\right)$,

b) $\frac{1}{2}\log x^4-\frac{1}{3}\log x^3=\log\left(x^4\right)^{\frac{1}{2}}-\log\left(x^3\right)^{\frac{1}{3}}=\log x^2-\log x=\log\frac{x^2}{x}=\log x$,

c) $3\log_2 5+4\log_2 x^6-\frac{1}{6}\log_2 x^6y^{12}=\log_2 5^3+\log_2\left(x^6\right)^4-\log_2\left(x^6y^{12}\right)^{\frac{1}{6}}=$

$=\log_2 125+\log_2 x^{24}-\log_2\left(xy^2\right)=\log_2\left(125x^{24}\right)-\log_2\left(xy^2\right)=$

$=\log_2\frac{125x^{24}}{xy^2}=\log_2\frac{125x^{23}}{y^2}$,

d) $2+\log_5\left(x^2-25\right)-2\log_5(x-5)=\log_5 5^2+\log_5\left(x^2-25\right)-\log_5(x-5)^2=$

$=\log_5\left(25\left(x^2-25\right)\right)-\log_5(x-5)^2=\log_5\frac{25(x-5)(x+5)}{(x-5)^2}=\log_5\frac{25(x+5)}{(x-5)}$.

Na kraju dajemo važna pravila vezana za baze logaritama.

Formule za promjenu baze logaritma

Neka su $a,b,c>0$ i $a,b\neq 1$. Tada vrijedi:

1. $\log_b c=\frac{\log_a c}{\log_a b}\quad\Rightarrow\quad\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$,
2. $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$,
3. $\log_{b^k} c=\frac{1}{k}\log_b c$.

formule za promjenu baze logaritma

Formule za promjenu baze važne su jer nam razne tablice i džepna računala najčešće omogućavaju izračunavanje logaritama samo po dvije baze – po bazi 10 i bazi e.

Izračunavanje logaritama

Logaritam broja najlakše određujemo pomoću džepnog računala. Nakon upisivanja broja čiji logaritam tražimo, pritisnemo točku s oznakom **log** i na zaslonu pročitamo dobiveni broj. Dobiveni broj je logaritam po bazi 10 od upisanog broja. Želimo li izračunati logaritam po bazi e pritisnemo tipku **ln**.

izračunavanje logaritama

Primjer 1. Izračunajmo pomoću džepnog računala (rezultat zaokružujemo na 5 decimala):

a) $\log 2 = 0.30103$,
b) $\log 246 = 2.39094$,
c) $\log 0.035 = -1.45593$,
d) $\ln 5.5 = 1.70475$,
e) $\ln \frac{1}{5} = -1.60944$.

Želimo li izračunati logaritam po nekoj drugoj po volji odabranoj, bazi, koristit ćemo formule za promjenu baze logaritma:

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{0.69897}{0.30103} = 2.32193$,
b) $\log_{11} 3 = \frac{\log 3}{\log 11} = \frac{0.47712}{1.04139} = 0.45816$.

2.6. LOGARITAMSKE FUNKCIJE

Logaritamska funkcija s bazom b jest realna funkcija oblika:

$$f(x) = \log_b x,$$

gdje je $b > 0$ i $b \neq 1$. Po definiciji logaritma, nužno je $x > 0$.

logaritamska funkcija

Logaritamska funkcija pozitivnom realnom broju pridružuje njegov logaritam.

Primjeri eksponencijalnih funkcija su npr. funkcije:

$$f(x) = \log_3 x,\ \ f(x) = \log x,\ \ f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x,\ \ f(x) = \log_{\sqrt{2}} x.$$

Svojstva logaritamskih funkcija analizirat ćemo iz njihovog grafa.

Primjer 1. Nacrtajmo grafove logaritamskih funkcija:

a) $f(x)=\log_2 x$,

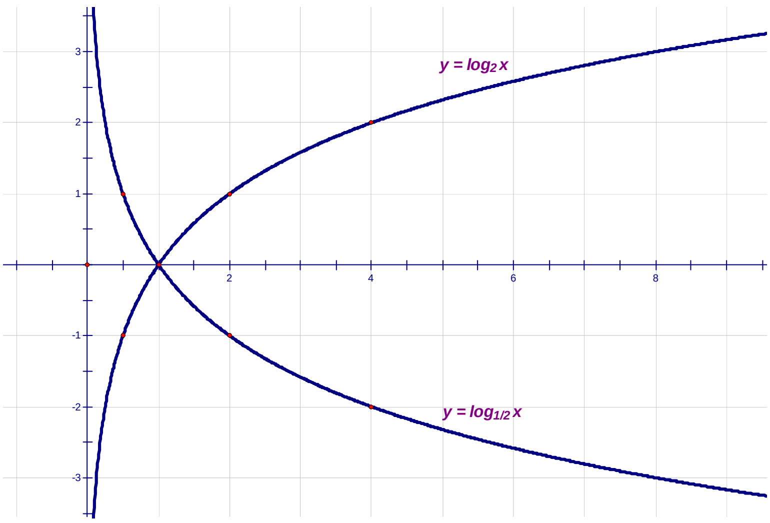
b) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$.

Odredimo najprije nekoliko točaka traženih grafova:

x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$f(x)=\log_2 x$	0	1	2	-1	-2

x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$	0	-1	-2	1	2

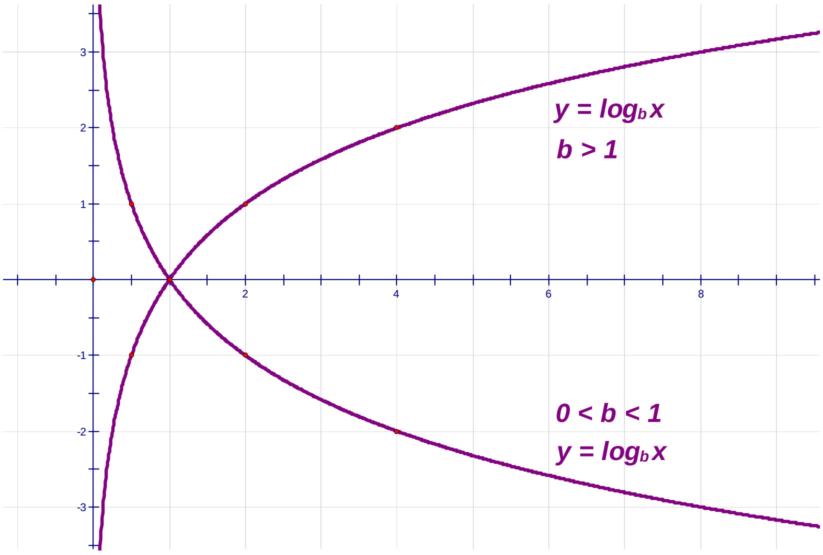
U istom koordinatnom sustavu nacrtajmo sada grafove zadanih funkcija:



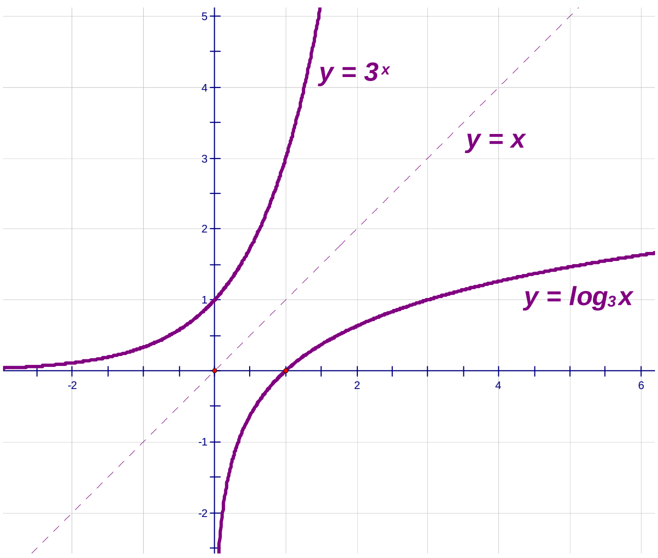
Zorni prikaz daje nam osnovna svojstva logaritamskih funkcija:

1. Područje definicije (domena) logaritamske funkcije $f(x)=\log_b x$ jest skup pozitivnih realnih brojeva $\mathbf{R}^+=\langle 0,+\infty\rangle$, a područje vrijednosti (kodomena) čitavi skup realnih brojeva $\mathbf{R}$.
2. Logaritamska funkcija $f(x)=\log_b x$ za:
   a) $b>1$ raste, tj. za $x_1<x_2$ vrijedi $\log_b x_1<\log_b x_2$,
   b) $0<b<1$ pada, tj. za $x_1<x_2$ vrijedi $\log_b x_1>\log_b x_2$.
3. Graf $y=\log_b x$ siječe x-os u točki $(1,0)$.
4. Graf $y=\log_b x$ ne siječe y-os nego joj se asimptotski približava.

svojstva logaritamske funkcije



Logaritamska funkcija s bazom b i eksponencijalna funkcija s bazom b međusobno su inverzne. Naime, ako je $y = b^x$, onda je $x = \log_b y$ i obrnuto. Grafovi međusobno inverznih funkcija simetrični su s obzirom na simetralu I. i III. kvadranta, npr:



2.7. LOGARITAMSKE JEDNADŽBE

Jednadžba u kojoj se nepoznanica nalazi pod znakom logaritma naziva se **logaritamska jednadžba**.

logaritamska jednadžba

Ako jednadžba sadrži samo jedan logaritam, obično ju je lako riješiti po definiciji logaritma.

Primjer 1. Riješimo jednadžbu: $\log_2(x-1) = 3$.
Iz definicije logaritma slijedi:

$$2^3 = x - 1,$$

odnosno

$$x = 9.$$

Budući da je logaritam definiran samo za pozitivne realne brojeve, kod rješavanja logaritamske jednadžbe nužna je **provjera rješenja** ili **provjera početnog uvjeta**.

provjera rješenja

početni uvjet

Ovdje provjera rješenja uvrštavanjem u jednadžbu daje:

$$\log_2(9-1) = \log_2 8 = 3$$

što je točno.
Drugi način je zapisati početni uvjet. Za danu jednadžbu on je $x - 1 > 0$, odnosno $x > 1$ koji je za $x = 9$ ispunjen.

Općenito, ako logaritamsku jednadžbu možemo svesti na oblik:

$$\log_b f(x) = a,$$

pri čemu je $b > 0$ i $b \neq 1$, onda je

$$f(x) = b^a.$$

Nužno je $f(x) > 0$.

pravila za rješavanje logaritamskih jednadžbi

Ako se u jednadžbi pojavljuje više logaritama, koristimo pravilo:

Ako logaritamsku jednadžbu možemo svesti na oblik:

$$\log_b f(x) = \log_b g(x),$$

pri čemu je $b > 0$ i $b \neq 1$, onda je

$$f(x) = g(x).$$

Ovdje je nužno $f(x) > 0$ i $g(x) > 0$.

Dobivena jednadžba, koja je u našim primjerima linearna ili kvadratna, daje sva rješenja zadane logaritamske jednadžbe.

Da bi lijevu i desnu stranu zapisali pod jednim logaritmom služimo se pravilima za računanje s logaritmima koja smo uvježbavali u točki 2.5.

Primjer 1. Riješimo logaritamske jednadžbe:

a) $\log_3(x-2) = \log_3(4-x)$

Prema zapisanom pravilu imamo

$$x - 2 = 4 - x,$$

pa je

$$x = 3.$$

Ovdje su početni uvjeti: $x - 2 > 0$, odnosno $x > 2$ i $4 - x > 0$, odnosno $x < 4$ što je za $x = 3$ ispunjeno.

b) $\log(x+9)-\log(x-3)=1-\log 5$

Zapišimo lijevu i desnu stranu jednadžbe pod jednim logaritmom primjenom pravila za računanje logaritmima:

$$\log\frac{x+9}{x-3}=\log 10-\log 5,$$

odnosno:

$$\log\frac{x+9}{x-3}=\log\frac{10}{5}.$$

Sada je:

$$\frac{x+9}{x-3}=2.$$

Slijedi:

$$x+9=2\cdot(x-3)$$

pa je

$$x=15.$$

Ispitajmo početne uvjete: $x+9>0$, odnosno $x>-9$ i $x-3>0$, odnosno $x>3$ što je za $x=15$ istinito.

c) $\log 8x+\log(2x+3)=2\log(1-4x)$

Kao i ranije, zapišimo lijevu i desnu stranu jednadžbe pod jednim logaritmom primjenom pravila za računanje logaritmima:

$$\log(8x\cdot(2x+3))=\log(1-4x)^2.$$

Sada je:

$$8x\cdot(2x+3)=(1-4x)^2.$$

Slijedi:

$$16x^2+24x=1-8x+16x^2$$

pa je

$$x=\frac{1}{32}.$$

Ispitajmo početne uvjete: $2x+3>0$, odnosno $x>-\frac{3}{2}$ i $1-4x>0$, odnosno $x<\frac{1}{4}$ što je za $x=\frac{1}{32}$ istinito.

d) $\log_3(x+5)=3-\log_3(x-1)$

I ovdje zapišimo lijevu i desnu stranu jednadžbe pod jednim logaritmom. Najprije je

$$\log_3(x+5)=\log_3 27-\log_3(x-1)$$

i dalje

$$\log_3(x+5)=\log_3\frac{27}{x-1}.$$

Sada je:

$$x+5=\frac{27}{x-1},$$

odnosno

$$(x+5)(x-1)=27.$$

Slijedi:

$$x^2+4x-32=0.$$

Dobivena jednadžba je kvadratna jednadžba čija su rješenja:

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot(-32)}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm 12}{2},$$

odnosno $x_1=4$ i $x_2=-8$.

Ispitajmo početne uvjete: $x+5>0$, odnosno $x>-5$ i $x-1>0$, odnosno $x>1$ što je ispunjeno samo za $x_1=4$ pa je rješenje polazne jednadžbe $x=4$.

2.8. LOGARITAMSKE NEJEDNADŽBE

Ovdje se sjetimo svojstva logaritamske funkcije koje govori o njezinom rastu ili padu – logaritamska funkcija $f(x)=\log_b x$ za:

a) $b>1$ raste, tj. za $x_1<x_2$ vrijedi $\log_b x_1<\log_b x_2$,

b) $0<b<1$ pada, tj. za $x_1<x_2$ vrijedi $\log_b x_1>\log_b x_2$.

Iz navedenog svojstva slijedi pravilo:

Ako logaritamsku nejednadžbu možemo svesti na oblik

$$\log f(x)<\log g(x)\ \ (\log f(x)>\log g(x)),$$

onda za:

a) $b>1$ vrijedi $f(x)<g(x)$ ($f(x)>g(x)$),

b) $0<b<1$ vrijedi $f(x)>g(x)$ ($f(x)<g(x)$),

pri čemu je $b>0$, $b\neq 1$, $f(x)>0$ i $g(x)>0$.

pravilo za rješavanje logaritamskih nejednadžbi

Primjer 1. Riješimo logaritamske nejednadžbe:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x-4)<\log_{\frac{1}{2}}(5-2x)$

Prema istaknutom pravilu imamo

$$x-4>5-2x,$$

odnosno

$$x>3.$$

Ovdje su početni uvjeti: $x-4>0$, odnosno $x>4$ i $5-2x>0$, odnosno $x<\frac{5}{2}$. Sva tri uvjeta moraju biti ispunjena. Zato tražimo njihov presjek. Njihov presjek je prazan skup pa ova nejednadžba nema rješenja.

b) $\log x+\log(x+4)\geq 2\log(2-x)$

Primjenom pravila za računanje logaritmima zapišimo lijevu i desnu stranu nejednadžbe pod jednim logaritmom:

$$\log(x\cdot(x+4))\geq\log(2-x)^2,$$

Sada je:

$$x(x+4)\geq(2-x)^2.$$

Slijedi:

$$x^2 + 4x \geq 4 - 4x + x^2$$

pa je

$$x \geq \frac{1}{2}.$$

Ispitajmo početne uvjete: $x > 0$, zatim $x + 4 > 0$, odnosno $x > -4$ i $2 - x > 0$, odnosno $x < 2$. Presjek svih dobivenih uvjeta je rješenje polazne nejednadžbe: $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right)$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Riješite jednadžbe:
   a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-2} = 81^{3+4x}$,
   b) $4^{3x-6} = \left(\frac{1}{8}\right)^{5-3x}$,
   c) $\frac{1}{125} \cdot \sqrt[3]{0.2^{2x-3}} = 25^{-\frac{1}{3}}$,
   d) $0.25 \cdot \sqrt[3]{4^{2x-1}} = 8^{-\frac{2}{3}}$,
   e) $3 \cdot 2^x - 2^{x-1} = 20$.

2. Nadopunite:
   a) Eksponencijalna funkcija je funkcija oblika __________________________.
   b) Područje definicije (domena) eksponencijalne funkcije je _____________,
   a područje vrijednosti (kodomena) _________________________________.
   c) Dvije rastuće eksponencijalne funkcije su: __________________________.
   d) Dvije padajuće eksponencijalne funkcije su: ________________________.

3. Nacrtajte graf eksponencijalnih funkcija:
   a) $y = 3^x$,
   b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

4. Nadopunite i odgovorite na pitanja:
   a) Logaritamska funkcija je funkcija oblika ____________________________,
   koja raste kada je _________________, a pada kada je ________________.
   b) Logaritamska funkcija je definirana za ______________________________,
   a područje vrijednosti logaritamske funkcije je ______________________.
   c) Što znate o sjecištima grafa logaritamske funkcije s koordinatnim osima?
   d) Navedite bar dvije rastuće i bar dvije padajuće logaritamske funkcije.

5. Nacrtajte graf logaritamskih funkcija:
   a) $f(x) = \log_5 x$,

b) $f(x)=\log_{\frac{1}{5}} x$.

6. Odredite x ako je:

a) $\log_x \frac{125}{27}=-3$,

b) $\log_3(2x+4)=-2$,

c) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{25}=3x$.

7. Izračunajte (primjenom pravila za računanje logaritmima):

a) $\log_2 \frac{1}{16}-\log_5 5+\log_{11} 1-4\log_3 3^{-2}=$

b) $\log_7 98-\log_7 2=$

c) $\frac{\log_2 100}{1+\log_2 5}=$

8. Primjenom pravila za računanje logaritmima zapišite kao zbroj i/ili razliku logaritama pomnoženih realnim brojem:

a) $\log\frac{1000a^6b^4c^{-2}}{d^{10}}=$

b) $\log_2\left(64\cdot\sqrt[7]{a^3b}\right)=$

9. Primjenom pravila za računanje logaritmima zapišite pod jednim logaritmom i sredite izraz:

a) $3\log_3 4+4\log_3 x^4-\frac{1}{2}\log_3 x^2y^4=$

b) $2+\log_5\left(x^2-9\right)-2\log_5(x+3)=$

10. Riješite jednadžbe:

a) $\log_2(4x-3)=\log_2(x+7)$,

b) $\log(x+7)-\log(x-5)=1-\log 2$,

c) $\log x+\log(x+1)=2\log(1-x)$,

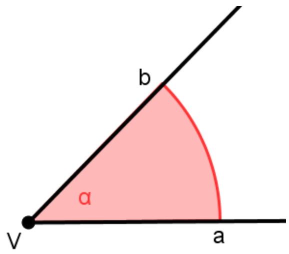
d) $\log_2(x+2)=6-\log_2(x+14)$.

3. TRIGONOMETRIJA PRAVOKUTNOG TROKUTA

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. *Kako definiramo trigonometrijske funkcije šiljastog kuta?*
2. *Kako definicije trigonometrijskih funkcija primjenjujemo na rješavanje pravokutnog trokuta? Kako ih primjenjujemo u zadacima iz planimetrije, a kako u situacijama svakodnevnog života?*

3.1. MJERENJE KUTA



Kut je dio ravnine omeđen dvama polupravcima sa zajedničkom početnom točkom.

kut

Kut na slici označavamo $\angle aVb$. Polupravci a i b nazivaju se **krakovi kuta**, a zajednička početna točka V **vrh kuta**.

krakovi kuta

vrh kuta

Kutove možemo mjeriti. Mjere kutova najčešće označavamo slovima grčkog alfabeta: α, β, χ, …

Mjerne jedinice, koje najčešće koristimo, su **stupanj** (oznaka $1°$) i **radijan** (oznaka 1 rad).

stupanj

radijan

Manje mjerne jedinice od stupnja su **minuta** ($1'$) i **sekunda** ($1''$):

$$1° = 60'$$
$$1' = 60''$$
$$1° = 3600''$$

Definirajmo jedinicu 1 rad:

Središnji kut kojemu je duljina pridruženog kružnog luka jednaka duljini polumjera kružnice je kut mjere **1 rad.**

1 rad

Odaberemo li polumjer kružnice za jedinicu mjerenja dobivamo da puni kut ima mjeru $2 \cdot 1 \cdot \pi = 2\pi$ radijana, odnosno da je:

$$360° = 2\pi \text{ rad.}$$

Slijedi:

$$180° = \pi \text{ rad,}$$
$$90° = \frac{\pi}{2} \text{ rad,}$$
$$60° = \frac{\pi}{3} \text{ rad,}$$
$$45° = \frac{\pi}{4} \text{ rad,}$$
$$30° = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Iz $180° = \pi$ rad dobivamo jednakost koja nam omogućava preračunavanje stupnjeva u radijane:

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad,}$$

odnosno ako je α mjera kuta u stupnjevima, njegovu mjeru u radijanima računamo po formuli:

$$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \, \text{rad}.$$

Isto tako iz $\pi\,\text{rad} = 180^\circ$ slijedi:

$$1 \text{ rad } = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45'',$$

odnosno ako je α mjera kuta u radijanima, onda mjeru kuta u stupnjevima računamo po formuli:

$$\alpha \, \text{rad } = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha \, .$$

formule za pretvorbu stupnjeva u radijane i obrnuto

Primjer 1. Mjeru kuta u stupnjevima izrazimo u radijanima:

a) $150^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 150 = \frac{5\pi}{6}$ rad,

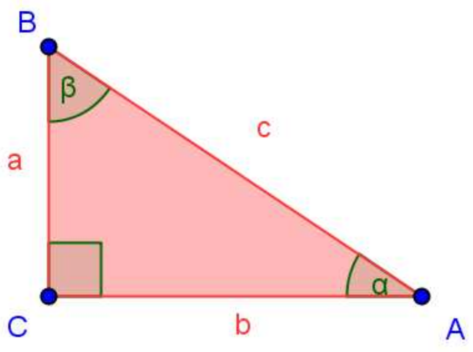
b) $72.36^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 72.36 = 1.26292$ rad.

Primjer 2. Mjeru kuta u radijanima izrazimo u stupnjevima:

a) $3\,\text{rad } = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 3 \approx 181.8873358^\circ \approx 181^\circ 53' 14''$,

b) $\frac{5\pi}{9}\,\text{rad } = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{9} = 100^\circ$.

3.2. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE ŠILJASTOG KUTA



Promotrimo pravokutni trokut s duljinama katetama a, b i duljinom hipotenuzom c. Mjere njegovih šiljastih kutova označimo α i β.

Nasuprot kuta mjere α je kateta duljine a. Naziva se **nasuprotna katetom** za kut mjere α.

nasuprotna kateta

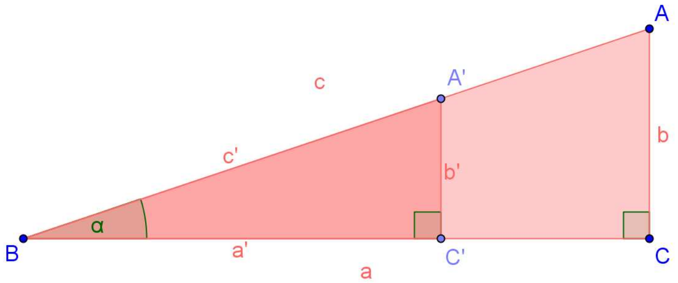
Uz kut (pri kutu) mjere α je kateta duljine b. Naziva se **priležeća katetom** za kut mjere α.

priležeća kateta

Često u govoru izostavljamo riječ „duljina“ i „mjera“ kad govorimo o duljini stranice i mjeri kuta pa kratko kažemo:

$a =$ nasuprotna kateta za kut α,
$b =$ priležeća kateta za kut α,
$c =$ hipotenuza.

Pogledajmo sada sliku:



Uočimo trokute ABC i $A'B'C'$. Duljine stranica trokuta ABC su a, b i c, a duljine stranica trokuta $A'B'C'$ a', b' i c'. Zbog sličnosti trokuta ABC i $A'B'C'$ vrijedi:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Dakle, omjer duljine nasuprotne i duljine priležeće katete za kut α ne ovisi o duljini kateta a i b nego o mjeri kuta α. Slično možemo pokazati za omjer duljine nasuprotne katete i duljine hipotenuze, te omjer duljine priležeće katete i duljine hipotenuze.

U pravokutnom trokutu ABC omjere duljina kateta i duljine hipotenuze se nazivaju **trigonometrijske funkcije šiljastog kuta**.

trigonomet-rijske funkcije šiljastog kuta

U **pravokutnom trokut** za njegov **šiljasti kut** definiramo:

Sinus kuta (oznaka: $\sin$) je omjer duljine nasuprotne katete tom kutu i duljine hipotenuze.

sinus

$$\text{sinus kuta} = \frac{\text{duljina nasuprotne katate}}{\text{duljina hipotenuze}}$$

Kosinus kuta (oznaka: $\cos$) je omjer duljine priležeće katete tom kutu i duljine hipotenuze.

kosinus

$$\text{kosinus kuta} = \frac{\text{duljina priležeće katate}}{\text{duljina hipotenuze}}$$

Tangens kuta (oznaka: tg) je omjer duljine nasuprotne i duljine priležeće katete tom kutu.

tangens

$$\text{tangens kuta} = \frac{\text{duljina nasuprotne katate}}{\text{duljina priležeće katete}}$$

Kotangens kuta (oznaka: ctg) je omjer duljine priležeće i duljine nasuprotne katete tom kutu.

kotangens

$$\text{kotangens kuta} = \frac{\text{duljina priležeće katate}}{\text{duljina nasuprotne katete}}$$

Prema slici, u pravokutnom trokutu ABC za kut mjere α vrijedi:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a},$$

a za kut mjere β:

$$\sin\beta = \frac{b}{c},\ \cos\beta = \frac{a}{c},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a},\ \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}.$$

Primjer 1. Izračunajmo vrijednosti trigonometrijskih funkcija (računat ćemo ih na 5 decimala) kutova α i β u pravokutnom trokutu ABC ako su duljine kateta 5 cm i 12 cm.

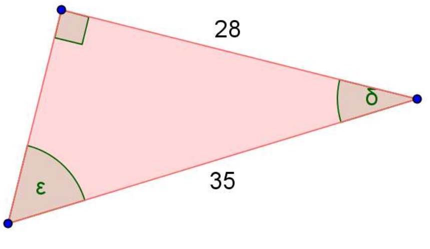
Neka je $a = 5$ cm i $b = 12$ cm. Primjenom Pitagorina poučka računamo najprije duljinu hipotenuze:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}.$$

Sada je:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} = 0.38462,$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} = 0.92308,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{5}{12} = 0.41\dot{6},$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{12}{5} = 2.4,$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} = 0.92308,$$
$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} = 0.38462,$$
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{12}{5} = 2.4,$$
$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b} = \frac{5}{12} = 0.41\dot{6}.$$

Primjer 2. Izračunaj vrijednosti trigonometrijskih funkcija za kutove sa slike ako je duljina jedne njegove katete 28 cm, a duljina hipotenuze 35 cm:



Primjenom Pitagorina poučka izračunajmo duljinu druge katete, označimo je x:

$$x = \sqrt{35^2 - 28^2} = \sqrt{1225 - 784} = \sqrt{441} = 21 \text{cm}.$$

Sada je:

$$\sin\delta = \frac{21}{35} = 0.6,\ \cos\delta = \frac{28}{35} = 0.8,\ \mathrm{tg}\,\delta = \frac{21}{28} = 0.75,\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{28}{21} = 1.\dot{3},$$

$$\sin\varepsilon = \frac{28}{35} = 0.8,\ \cos\varepsilon = \frac{21}{35} = 0.6,\ \mathrm{tg}\,\varepsilon = \frac{28}{21} = 1.\dot{3},\ \mathrm{ctg}\,\varepsilon = \frac{21}{28} = 0.75.$$

Primjer 3. Izračunajmo duljinu hipotenuze u pravokutnom trokutu ako je $\sin\beta = \frac{3}{5}$ i $b = 6$.

Iz $\sin\beta = \frac{b}{c}$ je $\frac{3}{5} = \frac{6}{c}$ pa je $3c = 30$, odnosno $c = 10$.

Uočimo, budući da su duljine kateta manje od duljine hipotenuze, za svaki šiljasti kut vrijedi:

$$0 < \sin\alpha < 1 \text{ i } 0 < \cos\alpha < 1.$$

Vrijednosti funkcija tangens i kotangens šiljastog kuta mogu biti svi realni brojevi veći od nule:

$$0 < \mathrm{tg}\,\alpha < +\infty \text{ i } 0 < \mathrm{ctg}\,\alpha < +\infty.$$

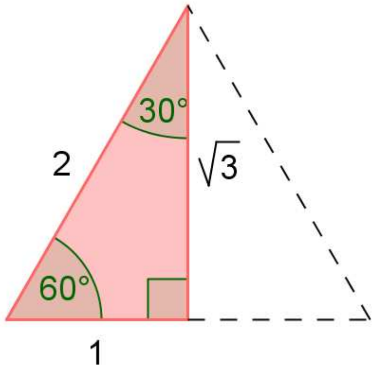
Primjer 4. Koji od brojeva $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{10}}{10}$, π, $\frac{1}{100}$ može biti sinus kuta?

Budući da je $0 < \sin\alpha < 1$, sinus kuta mogu biti brojevi: $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{10}}{10}$ i $\frac{1}{100}$.

3.3. VRIJEDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA KUTOVA OD 30°, 45° I 60°

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova od $30°$, $45°$ i $60°$ možemo lako izračunati. U tu svrhu koristimo se istaknutim pravokutnim trokutima: polovicom jednakostraničnog trokuta stranice duljine 2 i polovicom jediničnog kvadrata.

Povučemo li visinu jednakostraničnog trokuta stranice duljine 2, dobivamo pravokutan trokut kojemu je duljina hipotenuze 2, a duljine kateta 1 i $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, pogledajmo sliku:



Prema definiciji trigonometrijskih funkcija dobivamo:

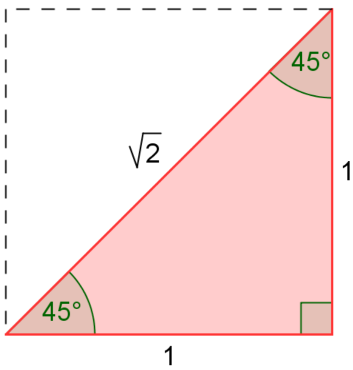
$$\sin 30° = \frac{1}{2},\qquad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \cos 60° = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},\qquad \operatorname{tg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3},\qquad \operatorname{ctg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Podijelimo li jedinični kvadrat dijagonalom na dva dijela, dobivamo jednakokračan pravokutan trokut, tj. pravokutan trokut kojemu su šiljasti kutovi mjere $45°$, pogledajmo sliku:



Prema definiciji trigonometrijskih funkcija dobivamo:

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\operatorname{ctg} 45° = \frac{1}{1} = 1,$$

Dobivene rezultate pregledno zapisujemo u tablicu:

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

tablica vrijednosti trigonometrijskih funkcija za poznate kutove

Primjer 1. Izračunajmo:

a) vrijednost izraza:

$$\frac{3tg^2 45°+1}{2\sin 60°-\cos 30°}=\frac{3\cdot 1^2+1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{1}}=\frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3},$$

b) vrijednost izraza $\sin^2\alpha+\cos\alpha\cdot ctg\alpha$ za $\alpha=30°$:

$$\sin^2 30°+\cos 30°\cdot ctg30°=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{7}{4}.$$

3.4. RAČUNANJE VRIJEDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Iako postoje tablice vrijednosti trigonometrijskih funkcija, ovdje ćemo za računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija koristiti džepno računalo. Većina džepnih računala ima tipke SIN, COS i TAN, iznad kojih su oznake SIN^{-1}, COS^{-1} i TAN^{-1}.

Računamo li vrijednost jedne od trigonometrijskih funkcija nekog kuta zadanog u stupnjevima na zaslonu džepnog računala treba pisati oznaka DEG. Za kut zadan u radijanima treba pisati oznaka RAD.

Kada je kut zadan u stupnjevima, minutama i sekundama, treba pripaziti na njegov unos. Ako džepno računalo mjeru kuta u stupnjevima, minutama i sekundama kod računanja ne pretvara automatski u kut mjere u stupnjevima to moramo učiniti prethodno, npr. unesemo kut u obliku decimalnog broja i pritisnemo tipku koja obavlja preračunavanje.

Nakon što upišemo kut u stupnjevima, pritisnemo tipku s oznakom tražene funkcije. Tada se na zaslonu prikaže vrijednost tražene trigonometrijske funkcije.

Džepna računala nemaju oznaku za funkciju kotangens. Kotangens kuta odredimo tako da najprije odredimo njegov tangens, a zatim pritisnemo tipku

1/x ili x^{-1}. Kotangens kuta jednak je recipročnoj vrijednosti tangensa tog kuta.

Primjer 1. Pomoću džepnog računala izračunajmo:

a) $\sin 50°$
Budući da je zadan kut u stupnjevima na zaslonu džepnog računala mora pisati oznaka DEG.
Sada upišemo 50 i pritisnemo tipku SIN. Očitamo broj na 5 decimala: 0.766044 pa je $\sin 50° = 0.766044$.

b) $\cos 72°13'$
Najprije kut zadan u stupnjevima i minutama preračunamo u kut u stupnjevima ako to džepno računalo ne radi samostalno (svatko treba istražiti kako radi njegovo džepno računalo):
$$72°13' = 72.21\dot{6}°.$$
Sada upišemo 72.216666 (ostavimo dobiveni rezultat preračunavanja) i pritisnemo tipku COS. Očitamo broj na 5 decimala: 0.30542 pa je $\sin 72°13' = 0.30542$.

c) $\mathrm{tg}\, 66°02'14''$
Kut zadan u stupnjevima, minutama i sekundama preračunamo u kut u stupnjevima:
$$66°02'14'' = 66.037\dot{2}°.$$
Sada upišemo 66.037222i pritisnemo tipku TAN. Očitamo broj na 5 decimala: 2.24997 pa je $\mathrm{tg}\, 66°02'14'' = 2.24997$.

d) $\mathrm{ctg}\, 15°16'$
Kut zadan u stupnjevima i minutama preračunamo u kut u stupnjevima:
$$15°16' = 15.2\dot{6}°.$$
Najprije računamo vrijednost funkcije tangens. Upišemo 15.266666 i pritisnemo tipku TAN. Dobili smo vrijednost funkcije tangens za zadani kut: 0.27294. Sada pritisnemo tipku 1/x i očitamo broj na 5 decimala: 3.66376 pa je $\mathrm{ctg}\, 15°16' = 3.66376$.

računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija zadanog kuta na džepno računalo

Obrnuti problem je iz poznate vrijednosti trigonometrijske funkcije odrediti kut. U tom slučaju nakon upisane vrijednosti trigonometrijske funkcije pritisnemo tipku 2nd ili SHIFT, a zatim tipku SIN, COS ili TAN.
Računamo li kut iz vrijednosti njegovog kotangensa, tada najprije pritiskom na tipku 1/x dobijemo vrijednost tangensa traženog kuta, a onda na opisani način dobivamo traženi kut.

Primjer 2. Izračunajmo, koristeći se džepnim računalom, kut α ako je:

a) $\sin \alpha = 0.12345$
Najprije upišemo vrijednost 0.12345, zatim pritisnemo tipku SHIFT pa tipku SIN (rezultat njihovog djelovanja je funkcija $\sin^{-1}$ koja je inverzna funkciji sin). Očitamo kut u stupnjevima 7.09125° i preračunamo ga u kut u

stupnjevima, minutama i sekundama. Traženi kut je $\alpha = 7°05'28''$.

b) $\cos\alpha = 0.24688$
Najprije upišemo vrijednost 0.24688, zatim pritisnemo tipku SHIFT pa tipku COS (rezultat njihovog djelovanja je funkcija $\cos^{-1}$ koja je inverzna funkciji $\cos$). Očitamo kut u stupnjevima $75.70703°$ i preračunamo ga u kut u stupnjevima, minutama i sekundama. Traženi kut je $\alpha = 75°42'25''$.

računanje kuta iz poznate vrijednosti trigonomet-rijske funkcije

c) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2.22334$
Najprije upišemo vrijednost 2.22334, zatim pritisnemo tipku SHIFT pa tipku TAN (rezultat njihovog djelovanja je funkcija tg^{-1} koja je inverzna funkciji tg). Očitamo kut u stupnjevima $65.78304°$ i preračunamo ga u kut u stupnjevima, minutama i sekundama. Traženi kut je $\alpha = 65°48'58''$.

d) $\mathrm{ctg}\,\alpha = 1.3\dot{5}$
Najprije upišemo vrijednost 1.35555 i pritisnemo tipku 1/x koja nam daje vrijednost funkcije tangens: $\mathrm{tg}\,\alpha = 0.73771$. Zatim pritisnemo tipku SHIFT pa tipku TAN. Očitamo kut u stupnjevima $36.41649°$ i preračunamo ga u kut u stupnjevima, minutama i sekundama. Traženi kut je $\alpha = 36°24'59''$.

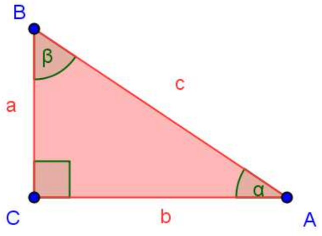
3.5. RJEŠAVANJE PRAVOKUTNOG TROKUTA

Riješiti pravokutan trokut znači izračunati duljine svih njegovih stranica i mjere svih njegovih kutova, odnosno:

1. koristeći se Pitagorinim poučkom izračunati duljinu treće stranice trokuta ako su poznate duljine preostalih dviju,
2. koristeći se činjenicom da zbroj mjera šiljastih kutova u pravokutnom trokutu iznosi $90°$, tj. $\alpha + \beta = 90°$,
3. iskoristiti trigonometrijske omjere kako bi izračunali duljine preostalih stranica i mjere kutova.

pravila rješavanja pravokutnog trokuta

Primjer 1. Izračunajmo preostale elemente pravokutnog trokuta ABC kojemu je duljina hipotenuze 263 cm i mjera kuta $\beta = 35°48'$.



Najprije skiciramo pravokutan trokut, označimo zadane i tražene elemente.
Izračunajmo mjeru drugog šiljastog kuta:

$$\alpha = 90° - \beta = 54°12'.$$

Po definiciji je $\sin\beta = \dfrac{b}{c}$ pa je $b = c \cdot \sin\beta = 153.84$ cm.

Slično, iz $\cos\beta = \dfrac{a}{c}$ slijedi $a = c \cdot \cos\beta = 213.31$ cm.

Uočimo da smo duljinu katete a mogli izračunati i primjenom Pitagorina poučka nakon što smo izračunali duljinu katete b, ali u tom bi slučaju u računu koristili međurezultat u kojemu može nastati greška. Na ovaj način koristili smo samo ulazne podatke i time smanjili mogućnost pogreške.

Primjer 2. Izračunajmo preostale elemente pravokutnog trokuta ABC kojemu su duljine kateta 2.3 cm i 3.1 cm.

Koristimo skicu iz prethodnog primjera. Neka je $a = 2.3$ cm i $b = 3.1$ cm.

Sada iz $tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{2.3}{3.1} = 0.74194$ dobivamo $\alpha = 36°34'22''$.

Dalje nalazimo drugi šiljasti kut $\beta = 90° - \alpha = 53°25'38''$.

Odredimo duljinu hipotenuze primjenom Pitagorina poučka:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3.86 \text{ cm.}$$

Primjer 3. Izračunajmo ostale elemente i površinu pravokutnog trokuta ABC kojemu je zadano $a = 73.4$ cm i $\alpha = 58°24'$.

Ponovo koristimo skicu iz *Primjera 1*. Odredimo najprije mjeru drugog šiljastog kuta: $\beta = 90° - \alpha = 31°36'$.

Sada iz $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ slijedi $c = \frac{a}{\sin\alpha} = 86.18$ cm.

Iz $tg\alpha = \frac{a}{b}$ slijedi $b = \frac{a}{tg\alpha} = 45.16$ cm.

Površina zadanog trokuta je: $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{73.4 \cdot 45.16}{2} = 1657.372$ cm².

Primjer 4. Izračunajmo ostale elemente pravokutnog trokuta ako je $a = 2.5$ cm i $c = 13$ cm.

I ovdje će nam poslužiti skica iz *Primjera 1*. Primjenom Pitagorina poučka izračunajmo duljinu druge katete: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 12.76$ cm.

Dalje, iz $\sin\alpha = \frac{a}{c} = 0.19231$ slijedi $\alpha = 11°05'14''$.

Na kraju, $\beta = 90° - \alpha = 78°54'46''$.

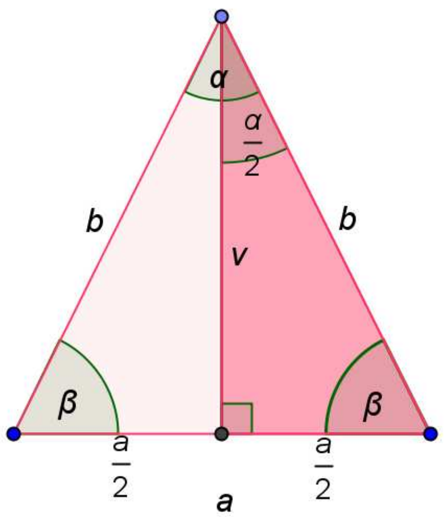
3.6. PRIMJENA RJEŠAVANJA PRAVOKUTNOG TROKUTA

Rješavanje pravokutnog trokuta često se primjenjuje u matematici, ali i u mnogim situacijama u svakodnevnom životu.

Pogledajmo najprije nekoliko primjera primjene u planimetriji.

Primjer 1. Izračunajmo opseg i površinu jednakokračnog trokuta ako je mjera kuta uz njegovu osnovicu $43°34'$, a duljina kraka 4.6 cm.

Skicirajmo najprije jednakokračan trokut i označimo ga:



U oznakama sa skice zadano je: $a = 4.6$ cm i $\beta = 43°34'$.
Visinom smo jednakokračan trokut podijelili na dva sukladna pravokutna trokuta.
Iz osjenčanog pravokutnog trokuta dobivamo:

$\cos\beta = \dfrac{\frac{a}{2}}{b}$ iz čega je:

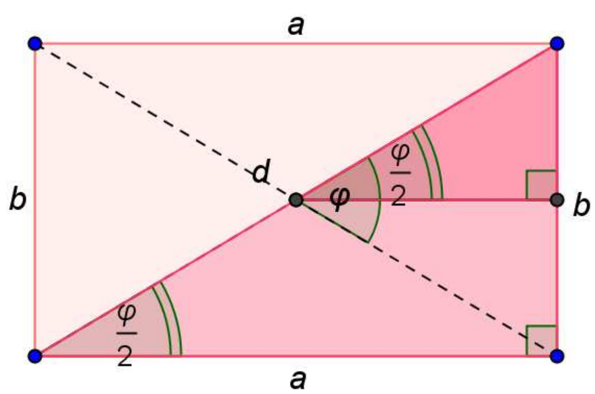
$b = \dfrac{\frac{a}{2}}{\cos\beta} = \dfrac{2.3}{\cos 43°34'} = 3.17$ cm.

Slično je: $tg\beta = \dfrac{v}{\frac{a}{2}}$ iz čega slijedi $v = \dfrac{a}{2} \cdot tg\beta = 2.3 \cdot tg\,43°34' = 2.19$ cm.

Sada je $o = a + 2b = 4.6 + 2 \cdot 3.17 = 10.94$ cm i $P = \dfrac{a \cdot v}{2} = \dfrac{4.6 \cdot 2.19}{2} = 5.037$ cm².

Primjer 2. Koliki je kut među dijagonalama pravokutnika ako je duljina jedne njegove stranice 10 cm, a duljina njegove dijagonale 12 cm?

Skicirajmo i označimo zadani pravokutnik:



Uz oznake sa skice zadano je $a = 10$ cm i $d = 12$ cm.

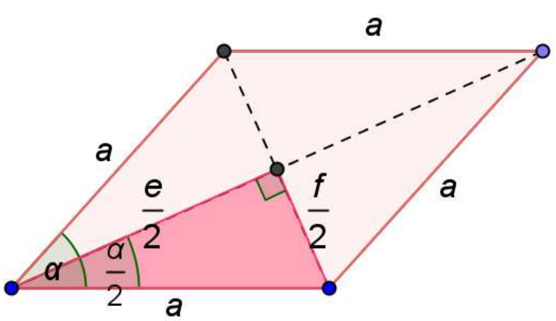
Uočimo na skici dva istaknuta pravokutna trokuta. Oni su slični pa se kut mjere $\dfrac{\varphi}{2}$ pojavljuje i u većem pravokutnom trokutu.

Zato vrijedi $\cos\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{a}{d} = \dfrac{10}{12} = 0.8\dot{3}$ pa je $\dfrac{\varphi}{2} = 33°33'26''$, odnosno $\varphi = 67°06'52''$.

primjena rješavanja pravokutnog trokuta u planimetriji

Primjer 3. Odredimo opseg romba ako je duljina njegove kraće dijagonale 22 cm, a mjera njegovog šiljastog kuta $78°$.

Skicirajmo i označimo zadani romb:



Sjetimo se najprije da se dijagonale romba međusobno raspolavljaju i sijeku pod pravim kutom. Uočimo istaknuti pravokutni trokut.

Prema oznakama sa skice zadano je $f = 22$ cm i $\alpha = 78°$.

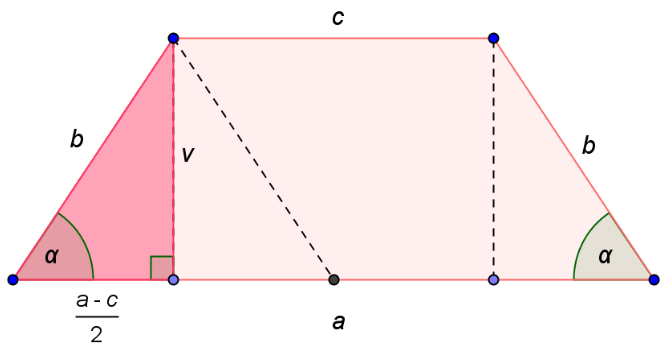
Sada imamo:

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{f}{2}}{a}$ pa je $a = \frac{\frac{f}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{11}{\sin 39°} = 17.48$ cm.

Slijedi $o = 4a = 4 \cdot 17.48 = 69.92$ cm.

Primjer 4. Izračunaj opseg i površinu jednakokračnog trapeza ako su duljine njegovih osnovica 16 cm i 10 cm i mjera šiljastog kuta $69°25'$.

Skicirajmo i označimo zadani trapez:



Prema oznakama sa skice zadano je $a = 16$ cm, $c = 10$ cm i $\alpha = 69°25'$.

Uočimo osjenčani pravokutan trokut. Njegove su katete duljine v i $\frac{a-c}{2}$, a hipotenuza duljine b.

Imamo: $\cos\alpha = \frac{\frac{a-c}{2}}{b}$ iz čega dobivamo $b = \frac{\frac{a-c}{2}}{\cos\alpha} = \frac{3}{\cos 69°25'} = 8.53$ cm.

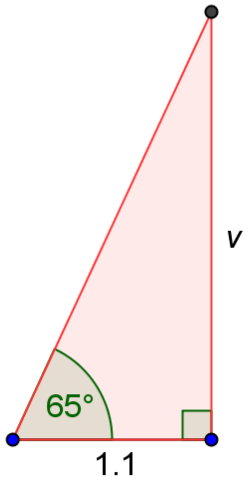
Slično, iz $tg\alpha = \frac{v}{\frac{a-c}{2}}$ slijedi $v = \frac{a-c}{2} \cdot tg\alpha = 3 \cdot tg 69°25' = 7.99$ cm.

Sada je $o = a + 2b + c = 16 + 2 \cdot 8.53 + 10 = 43.06$ cm i

$P = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{16+10}{2} \cdot 7.99 = 103.87$ cm².

Pogledajmo sada nekoliko zadataka primjene rješavanja pravokutnog trokuta na situacije iz svakodnevnog života.

Primjer 5. Na ulici stoji čovjek. Sunčeve zrake padaju pod kutom $65°$ i njegova je sjena duga 1.27 m. Kako je ime tom čovjeku ☺?



Pogledajmo skicu zadatka. Ovdje je riječ o matematičkom modeliranju, odnosno situaciju iz realnog svijeta zapisujemo matematičkim jezikom.

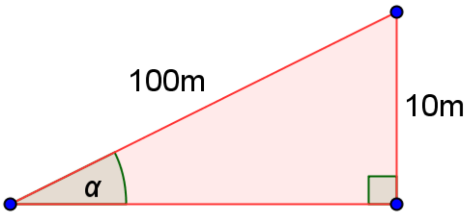
Prema definiciji funkcije tangens slijedi:

$tg 65° = \frac{v}{1.27}$ pa je $v = 1.27 \cdot tg 65° \approx 2.72$ m.

Ime tom čovjeku je Robert Pershing Wadlow i on je prema Guinnessovoj knjizi rekorda najviši čovjek na svijetu ikad izmjeren.

primjena rješavanja pravokutnog trokuta u realnom životu

Primjer 6. Uspon ceste od $p\%$ znači da se cesta na putu od 100 metara uspinje p metara. Pod kojim se kutom uspinje cesta ako je njezin uspon 10%?



Iz definicije funkcije sinus slijedi:

$\sin\alpha = \frac{10}{100} = 0.1$ pa je

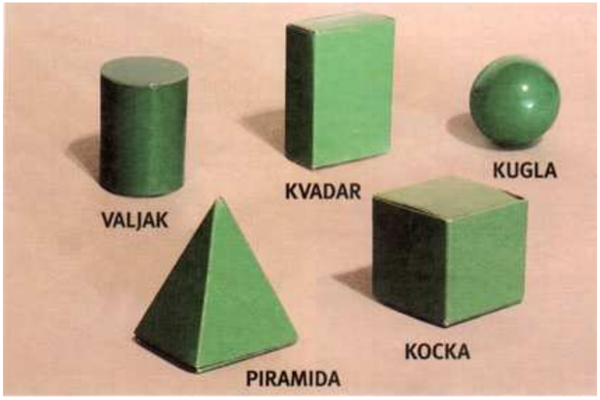
$\alpha = 5°44'21''$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Izračunajte nepoznate elemente i površinu pravokutnog trokuta *ABC* ako:
   a) $b = 15.5$ cm i $\alpha = 46°34'$,
   b) $a = 28.5$ cm i $b = 41.4$ cm.
2. Odredite mjere šiljastih kutova pravokutnog trokuta ako je omjer duljina njegovih kateta 20:30.
3. Izračunajte površinu jednakokračnog trokuta ako je mjera kuta uz njegovu osnovicu 73°48', a duljina njegove osnovice 6. 3 cm.
4. Koliki je kut među dijagonalama pravokutnika kojemu je duljina dijagonale 5 cm, a duljina jedne njegove stranice 4 cm?
5. Odredite mjeru šiljastog kuta romba kojemu je duljina jedne njegove dijagonale 32 cm, a površina 672 cm².
6. Izračunajte opseg i površinu jednakokračnog trapeza ako su duljine njegovih osnovica 10 cm i 6 cm i mjera šiljastog kuta 50°50'.
7. Ako jedna stuba ima visinu 12 cm, a širinu 26 cm, pod kojim se kutom uspinjemo hodajući po stubištu?
8. Do koje visine možemo popeti ljestvama dugačkim 20 m ako je kut pod kojim prislanjamo ljestve na zid 55°?

9. Vrh tornja vidi se pod kutom elevacije od 17° i z točke udaljene 132 m od podnožja tornja. Odredite visinu tornja.

4. GEOMETRIJA PROSTORA



Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. *Kako opisujemo geometrijska tijela i koje su glavne podjele?*
2. *Kako računamo oplošje i volumen geometrijskih tijela?*
3. *Kako naučeno primijeniti u situacijama iz realnog svijeta?*

4.1. GEOMETRIJSKA TIJELA

Geometrijska tijela su dijelovi prostora.

geometrijska tijela

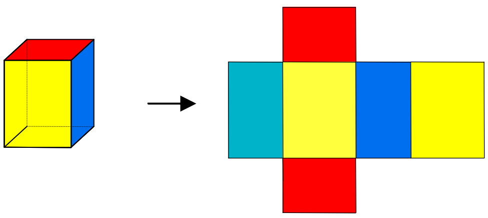
Vezano za geometrijska tijela uvest ćemo neke nove pojmove:

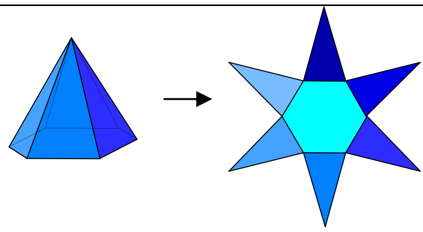
- **volumen** geometrijskog tijela – govori nam koliki dio prostora zauzima tijela,
- **oplošje** geometrijskog tijela – govori nam koliki je zbroj površina likova koji omeđuju tijelo,
- **vrhovi**, **bridovi**, **strane** geometrijskog tijela,
- **plošne** i **prostorne dijagonale**,
- **mrežu** geometrijskog tijela – lik koji dobijemo kada sve strane geometrijskog tijela razvučemo u ravninu:

volumen

oplošje

mreža





U literaturi nalazimo dvije **podjele** geometrijskih tijela:

podjele geometrijskih tijela

1. **uglata (prizme i piramide) i obla (valjak, stožac, kugla) geometrijska tijela**

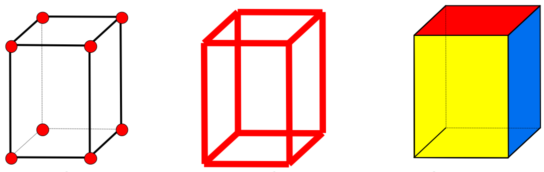
Uglata geometrijska tijela ili **poliedri** su geometrijska tijela koja je omeđena dijelovima ravnine. Mnogokuti, kao dijelovi ravnine, koji omeđuju poliedar nazivamo **stranama** poliedra. Susjedne strane poliedra spajaju se u **bridovima** poliedra. Točke poliedra u kojima se spajaju tri ili više bridova poliedra nazivamo **vrhovima** poliedra.

uglata geometrijska tijela

strane

bridovi

vrhovi



VRHOVI BRIDOVI STRANE

Dijagonale strana poliedra nazivamo **plošnim dijagonalama**. Dužine koje spajaju dva vrha poliedra i koje ne leže na jednoj strani poliedra nazivamo **prostornim dijagonalama** poliedra.

plošna dijagonala

prostorna dijagonala

PLOŠNA DIJAGONALA PROSTORNA DIJAGONALA

Obla geometrijska tijela omeđena su dijelovima ravnina i zaobljenom plohom (valjak, stožac) ili samo zaobljenom plohom (kugla).

obla geometrijska tijela

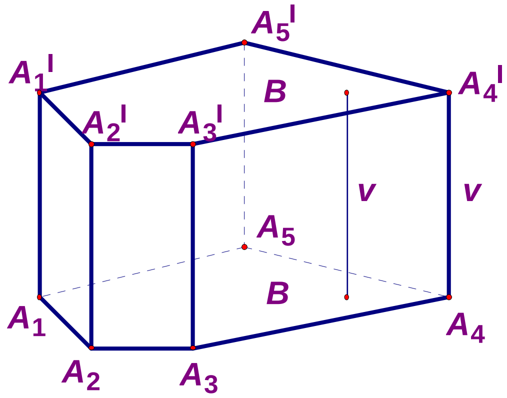
2. **cilindri (prizme i valjak), konusi (piramide i stožac) i kugla**

Cilindar je geometrijsko tijelo koje nastaje paralelnim pomakom proizvoljne baze, površine B, do visine v.

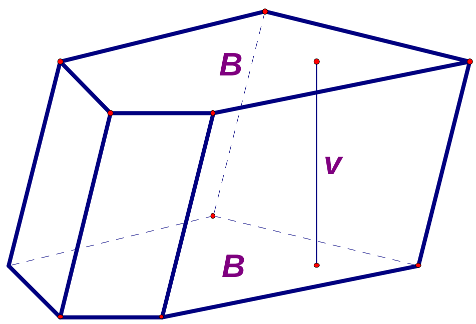
cilindar

Cilindar čija je baza mnogokut naziva se **prizma**.
Cilindar čija je baza krug naziva se **valjak**.

Ako cilindar nastaje paralelnim pomakom u smjeru okomitom na bazu, kažemo da je cilindar **uspravan**. U suprotnom, govorimo o **kosom** cilindru. U nastavku govorimo samo o uspravnim cilindrima.



USPRAVNA PRIZMA



KOSA PRIZMA

konus

Konus je geometrijsko tijelo koje se sastoji od svih dužina koje povezuju točke njegove proizvoljne baze, površine B, s njegovim vrhom V koji je na udaljenosti v od ravnine baze.

Konus čija je baza mnogokut naziva se **piramida**.
Konus čija je baza krug naziva se **stožac**.

Razlikujemo **uspravni** i **kosi konus**. Mi ćemo razmatrati samo uspravne konuse.

4.2. PRIZME

U prethodnom odjeljku definirali smo prizmu kao cilindar kojemu je baza mnogokut.

prizma

Možemo reći i: **prizma** je poliedar čije su dvije strane paralelni i sukladni mnogokuti, a ostale strane su paralelogrami (kod uspravnih prizmi preostale strane su pravokutnici).

baze prizme

pobočka

pobočje

Sukladni mnogokuti koji leže u paralelnim ravninama nazivaju se **baze**, a ostale strane **pobočke**. Sve pobočke zajedno čine **pobočje prizme**.

osnovni brid

bočni brid

Bridovi koji pripadaju bazama prizme nazivaju se **osnovni bridovi**.
Bridovi u kojima se spajaju po dvije pobočke nazivaju se **bočni bridovi** (**pobočni bridovi**). Kažemo i da su pobočni bridovi spojnice odgovarajućih vrhova donje i gornje baze.

n-terostrana prizma

Kažemo da je prizma ***n*-terostrana** ako je njezina baza n-terokut.

uspravna prizma

kosa prizma

Kažemo da je prizma **uspravna** ako su bočni bridovi okomiti na njezinu bazu. U suprotnom kažemo da je **kosa**.

Za uspravnu peterostranu prizme s gornje slike su:

– osnovni bridovi: dužine $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_1}$, $\overline{A_1'A_2'}$, $\overline{A_2'A_3'}$, $\overline{A_3'A_4'}$, $\overline{A_4'A_5'}$ i $\overline{A_5'A_1'}$,

– bočni bridovi: dužine $\overline{A_1A_1'}$, $\overline{A_2A_2'}$, $\overline{A_3A_3'}$, $\overline{A_4A_4'}$ i $\overline{A_5A_5'}$,
– pobočke: pravokutnici $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, $A_3A_4A_4'A_3'$, $A_4A_5A_5'A_4'$ i $A_1A_5A_5'A_1'$.

Kažemo da je prizma **pravilna** ako je uspravna i ako je njezina baza pravilan mnogokut. ***pravilna prizma***

Visina prizme je udaljenost ravnina u kojima leže baze prizme. ***visina prizme***

Objasnili smo pojam oplošja i volumena geometrijskog tijela.

Označimo li s B površinu baze prizme, s P površinu pobočja, a s v duljinu visine prizme, tada **oplošje prizme** računamo po formuli:

$$O = 2B + P\,,$$

oplošje prizme

a **volumen prizme** po formuli:

$$V = B \cdot v\,.$$

volumen prizme

Navedene formule vrijede za svaku prizmu pa će nam one u zadacima u kojima računamo oplošje i volumen biti polazne (nije nužno pamtiti sređene formule do kojih ćemo dolaziti ako znamo polazne i čime je omeđeno tijelo koje promatramo).

Primjer 1. Izračunajmo volumen prizme ako je njezina baza romb kojemu su dijagonale duljine 16 cm i 10 cm i duljina visine prizme 20 cm.

Budući da su zadane duljine dijagonala romba $e = 16$ cm i $f = 10$ cm, možemo najprije izračunati površinu baze prizme:

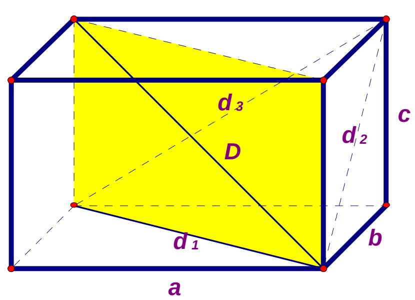
$$B = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{16 \cdot 10}{2} = 80 \text{ cm}^2.$$

Sada je:

$$V = B \cdot v = 80 \cdot 20 = 1600 \text{ cm}^3.$$

4.2.1. KVADAR

Kvadar je uspravna prizma kojoj je baza pravokutnik. ***kvadar***



Označimo: a, b i c duljine bridova kvadra, d_1, d_2, d_3 duljine njegovih plošnih dijagonala i D duljina prostorne dijagonale.

Tada je:

$d_1^{\,2} = a^2 + b^2$ pa je

$D^2 = d_1^{\,2} + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$, odnosno $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Baza kvadra je pravokutnik površine $B = a \cdot b$, a duljina visine jednaka je duljini bočnog brida c. Zato je volumen kvadra:

volumen kvadra

$$V = a \cdot b \cdot c\,,$$

a oplošje kvadra:

$$O = 2B + P = 2ab + 2ac + 2bc\,,$$

odnosno:

oplošje kvadra

$$O = 2(ab + ac + bc).$$

Primjer 1. Bazen ima oblik kvadra duljine 5 m, širine 3.5 m i visine 1.8 m. Koliko litara vode ima u bazenu ako je napunjen do $\frac{2}{3}$ svoje visine?

Zadano je $a = 5$ m, $b = 3.5$ m i $c = 1.8$ m. Volumen bazena je:

$$V = abc = 5 \cdot 3.5 \cdot 1.8 = 31.5 \text{ m}^3.$$

Budući da je bazen napunjen do $\frac{2}{3}$ svoje visine slijedi da u bazenu ima:

$\frac{2}{3} \cdot 31.5 = 21$ m³ vode. Izrazimo dobiveni volumen u litrama:

21 m³ $= 21000$ dm³ $= 21000$ litara vode.

Primjer 2. Izračunaj oplošje kvadra ako su duljine njegovih osnovnih bridova 3 cm i 4 cm, a duljina njegove prostorne dijagonale $\sqrt{29}$ cm.

Zadano je $a = 3$ cm, $b = 4$ cm i $D = \sqrt{29}$ cm.

Iz $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ slijedi:

$$\sqrt{3^2 + 4^2 + c^2} = \sqrt{29}\,,$$

odnosno:

$$9 + 16 + c^2 = 29$$

pa je $c = 2$ (uzimamo pozitivno rješenje jer je riječ o duljini brida).

Sada je:

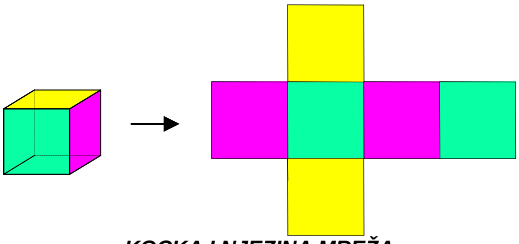
$$O = 2(ab + ac + bc) = 2(3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2) = 52 \text{ cm}^2.$$

4.2.2. KOCKA

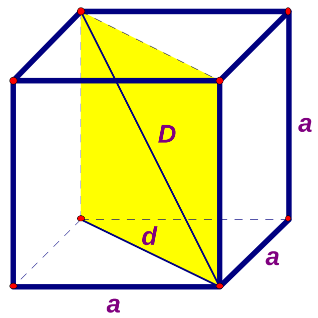
Kocka je kvadar kojemu su bridovi jednake duljine.

kocka

Slijedi, kocka je geometrijsko tijelo omeđeno sa šest kvadrata:



KOCKA I NJEZINA MREŽA



Označimo: a duljina brida kocke, d duljina plošne dijagonale, D duljina prostorne dijagonale.

Budući da je kocka kvadar za koji vrijedi $a=b=c$, uvrštavanjem u ranije izvedene formule za kvadar dobivamo:

$$d=a\sqrt{2} \text{ i}$$

$$D=a\sqrt{3}.$$

Volumen kocke je:

$$V=a^3,$$

a njezino oplošje:

$$O=6a^2.$$

volumen kocke

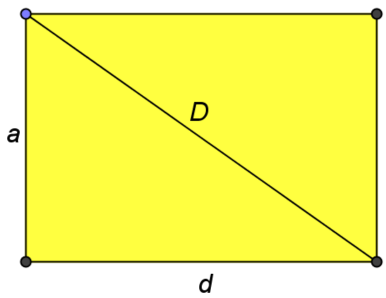
oplošje kocke

Primjer 1. Izračunajmo oplošje i volumen kocke kojoj je površina dijagonalnog presjeka $225\sqrt{2}$ cm².

Dijagonalni presjek prizme je presjek koji prolazi dijagonalama baze i sadrži prostornu dijagonalu prizme.

dijagonalni presjek prizme

Na gornjoj skici kocke, istaknut je (žuto osjenčan) dijagonalni presjek kocke. Skicirajmo ga zasebno:



Sa skice vidimo da je površina dijagonalnog presjeka:

$$P_d=a\cdot d=a\cdot a\sqrt{2}=a^2\sqrt{2},$$

pa je:

$$a^2\sqrt{2}=225\sqrt{2},$$

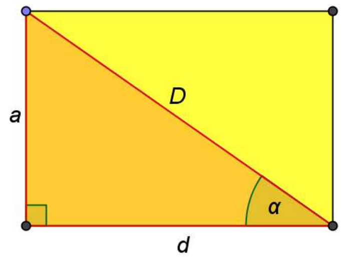
iz čega dobivamo:

$$a=15 \text{ cm.}$$

Sada je volumen kocke $V=a^3=15^3=3375$ cm³, a njezino oplošje $O=6a^2=6\cdot 15^2=1350$ cm².

Primjer 2. Odredimo mjeru kuta koji prostorna dijagonala kocke zatvara s ravninom baze.

Prema definiciji kuta između pravca i ravnine, kut između prostorne dijagonale i ravnine baze je kut između prostorne dijagonale i dijagonale baze. Dopunimo zato skicu dijagonalnog presjeka:



Uočimo pravokutan trokut iz kojeg po definiciji funkcije sinus vrijedi:

$$\sin\alpha = \frac{a}{D} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.57735,$$

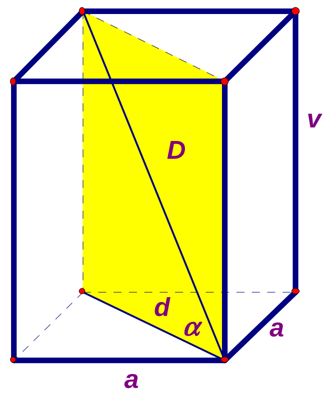
iz čega dobivamo:

$$\alpha = 35°15'51''.$$

4.2.3. PRAVILNA ČETVEROSTRANA PRIZMA

pravilna četverostrana prizma

Pravilna četverostrana prizma (kvadratna prizma) je uspravna prizma kojoj je baza kvadrat.



Označimo:

a … duljina osnovnog brida,
v … duljina visine (duljina bočnog brida),
d … duljina dijagonale baze,
D … duljina prostorne dijagonale,
α … mjera kuta između prostorne dijagonale i ravnine baze.

Budući da je baza kvadrat vrijedi:

$$B = a^2.$$

Pobočje čine četiri pravokutnika stranica duljine a i v pa je

$$P = 4av.$$

Sada je volumen pravilne četverostrane prizme:

volumen pravilne četverostrane prizme

$$V = B \cdot v = a^2 \cdot v,$$

a njezino oplošje:

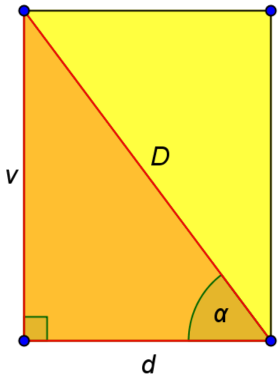
$$O = 2B + P = 2a^2 + 4av.$$

Dijagonalni presjek je pravokutnik stranica duljine d i v pa je njegova površina:

$$P_d = d \cdot v.$$

Primjer 1. Izračunaj oplošje i volumen pravilne četverostrane prizme ako je duljina dijagonale baze $7\sqrt{2}$ cm, a mjera kuta koji prostorna dijagonala zatvara s ravninom baze $68°$.

Skicirajmo dijagonalni presjek zadane prizme:



Zadano je $d = 7\sqrt{2}$ i $\alpha = 68°$.
Iz $d = a\sqrt{2}$, odnosno $a\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$ slijedi $a = 7$ cm.
Dalje, iz osjenčanog pravokutnog trokuta imamo:

$$tg\alpha = \frac{v}{d},$$

odnosno

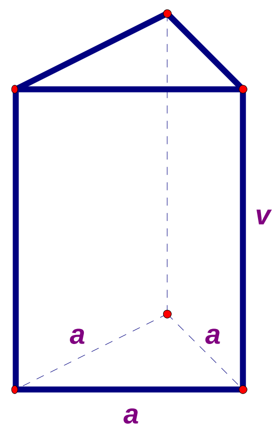
$$v = d \cdot tg\alpha = 7\sqrt{2} \cdot tg68° = 24.5 \text{ cm}.$$

Sada je volumen $V = a^2 \cdot v = 7^2 \cdot 24.5 = 1176$ cm³,
i oplošje $O = 2a^2 + 4av = 2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 \cdot 24.5 = 784$ cm².

4.2.4. PRAVILNA TROSTRANA PRIZMA

Pravilna trostrana prizma je uspravna prizma kojoj je baza jednakostraničan trokut.

pravilan trostrana prizma



Označimo:

a … duljina osnovnog brida,
v … duljina visine (duljina bočnog brida),

Budući da je baza jednakostraničan trokut vrijedi:

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Pobočje čine tri pravokutnika stranica duljine a i v pa je

$$P = 3av.$$

Sada je volumen pravilne trostrane prizme:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v,$$

volumen pravilne trostrane prizme

a njezino oplošje:

$$O = 2B + P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3av,$$

odnosno

$$O = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3av.$$

oplošje pravilne trostrane prizme

Primjer 1. Oplošje pravilne trostrane prizme iznosi $104\sqrt{3}$ cm², a duljina osnovnog brida je 8 cm. Izračunaj volumen prizme.

Zadano je $O = 104\sqrt{3}$ cm² i $a = 8$ cm. Uvrstimo li zadane podatke u formulu za oplošje dobivamo:

$$\frac{8^2\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 8v = 104\sqrt{3},$$

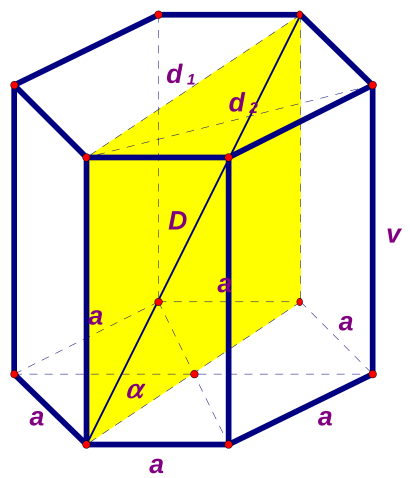
iz čega dobivamo $v = 3\sqrt{3}$ cm. Sada je traženi volumen:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3\sqrt{3} = 144 \text{ cm}^3.$$

4.2.5. PRAVILNA ŠESTEROSTRANA PRIZMA

Pravilna šesterostrana prizma je uspravna prizma kojoj je baza pravilan šesterokut.

pravilan šesterostrana prizma



Označimo:

a … duljina osnovnog brida,
v … duljina visine (duljina bočnog brida),
d_1 … duljina dulje dijagonale baze,
d_2 … duljina kraće dijagonale baze
D … duljina prostorne dijagonale,
α … mjera kuta između prostorne dijagonale i ravnine baze.

Budući da je baza pravilan šesterokut koji sa sastoji od šest jednakostraničnih trokuta stranice duljine a imamo:

$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Pobočje čine šest pravokutnika stranica duljine a i v pa je

$$P = 6av.$$

Sada je volumen pravilne šesterostrane prizme:

volumen pravilne šesterostrane prizme

$$V = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot v,$$

a njezino oplošje:

$$O = 2B + P = 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6av,$$

odnosno

oplošje pravilne šesterostrane prizme

$$O = 3\sqrt{3}a^2 + 6av.$$

Uočimo da je $d_1 = 2a$ i $d_2 = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Veći dijagonalni presjek je pravokutnik stranica duljine d_1 i v pa je njegova površina:

$$P_{d_1} = d_1 \cdot v \,.$$

Manji dijagonalni presjek je pravokutnik stranica duljine d_2 i v pa je njegova površina:

$$P_{d_2} = d_2 \cdot v \,.$$

Primjer 1. Izračunajmo oplošje i volumen pravilne šesterostrane prizme kojoj je površina većeg dijagonalnog presjeka 150 cm², a duljina visine 15 cm.

Uvrstimo li zadane podatke $P_{d_1} = 150$ cm² i $v = 15$ cm u formulu za površinu većeg dijagonalnog presjeka dobivamo:

$$d_1 \cdot 15 = 150$$

pa je $d_1 = 10$ cm, odnosno $a = 5$ cm.
Sada je volumen:

$$V = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot v = 3 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{2} = 37.5\sqrt{3} = 64.95 \text{ cm}^3$$

i oplošje:

$$O = 3\sqrt{3}a^2 + 6av = 3\sqrt{3} \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 \cdot 15 = 75\sqrt{3} + 450 = 579.9 \text{ cm}^2.$$

4.3. PIRAMIDE

U odjeljku 4.1. definirali smo piramidu kao konus kojemu je baza mnogokut.

Možemo reći i: **piramida** je poliedar čija je jednja strana mnogokut $A_1A_2A_3A_4A_5 \ldots A_n$, a ostale strane su trokuti sa zajedničkim vrhom V: A_1A_2V , A_2A_3V , A_3A_4V , A_4A_5V … A_nA_1V .

piramida

Mnogokut se naziva **baza piramide**, a trokuti **pobočke** piramide. Sve pobočke zajedno čine **pobočje**.

baza piramide

pobočka

pobočje

Bridovi koji pripadaju bazi piramide nazivaju se **osnovni bridovi**.
Bridovi koji spajaju vrh piramide s vrhovima baze nazivaju se **bočni bridovi** (**pobočni bridovi**).

osnovni brid

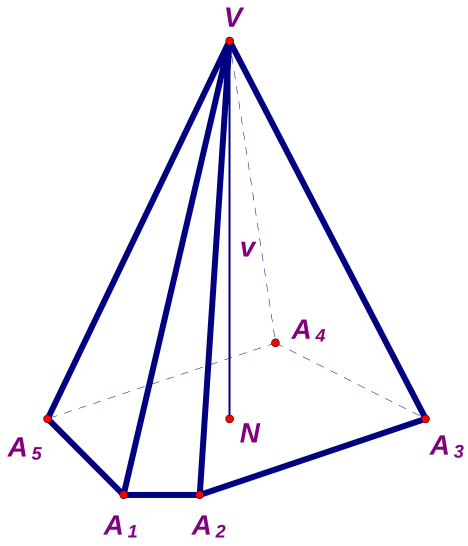
bočni brid

Kažemo da je piramida ***n*-terostrana** ako je njezina baza n-terokut.

n-terostrana piramida

Kažemo da je piramida **uspravna** ako su njezini bočni bridovi jednakih duljina. (Ova definicija dovodi do nekih nelogičnosti, ali je ovdje prihvaćamo kao zadovoljavajuću). U suprotnom kažemo da je **kosa**.

Na slici je prikazana peterostrana piramida:



- osnovni bridovi: dužine $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$ i $\overline{A_4A_5}$,
- bočni bridovi: dužine $\overline{A_1V}$, $\overline{A_2V}$, $\overline{A_3V}$, $\overline{A_4V}$ i $\overline{A_5V}$,
- pobočke: trokuti A_1A_2V, A_2A_3V, A_3A_4V, A_4A_5V i A_5A_1V.

Visina piramide je udaljenost vrha piramida od ravnine baze, tj. udaljenost vrha piramide od njegove ortogonalne projekcije na ravninu baze, točke N koju nazivamo **nožište** visine.

visina piramide

nožište visine

Kažemo da je piramida **pravilna** ako je uspravna i ako je njezina baza pravilan mnogokut. Pobočke pravilne piramide su sukladni jednakokračni trokuti, a nožište visine nalazi se u središtu bazi opisane kružnice.

pravilan piramida

Označimo li s B površinu baze piramide, s P površinu pobočja, a s v duljinu visine prizme, tada **oplošje piramide** računamo po formuli:

$$O = B + P\,,$$

oplošje piramide

a **volumen piramide** po formuli:

$$V = \frac{B \cdot v}{3}\,.$$

volumen piramide

Navedene formule vrijede za svaku piramidu pa će nam one u zadacima u kojima računamo oplošje i volumen piramide biti polazne.

Primjer 1. Izračunajmo volumen piramide ako je njezina baza pravokutan trokut kojemu su katete duljine 12 cm i 5 cm i duljina njezine visine 7 cm.

Baza piramide je pravokutan trokut kateta duljine $a = 10$ cm i $b = 5$ cm, odnosno površine:

$$B = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ cm}^2.$$

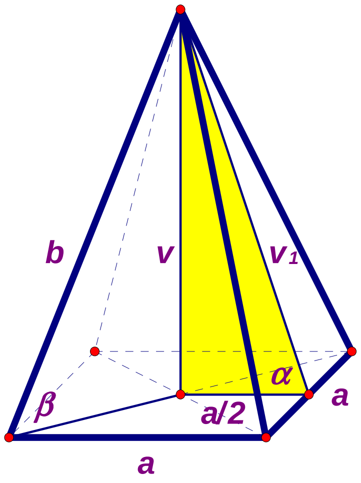
Sada je:

$$V = \frac{B \cdot v}{3} = \frac{30 \cdot 70}{3} = 70 \text{ cm}^3.$$

4.3.1. PRAVILNA ČETVEROSTRANA PIRAMIDA

Pravilna četverostrana piramida je uspravna piramida kojoj je baza kvadrat.

pravilna četverostrana piramida



Označimo:

a ... duljina osnovnog brida
b ... duljina bočnog brida
v ... duljina visine piramide
v_1 ... duljina visine pobočke
α ... kut između pobočke i ravnine baze
β ... kut između bočnog brida i ravnine baze

Budući da je baza kvadrat vrijedi:

$$B = a^2.$$

Pobočje čine četiri jednakokračna trokuta osnovice duljine a i visine duljine v_1 pa je

$$P = 4 \cdot \frac{av_1}{2} = 2av_1.$$

Sada je volumen pravilne četverostrane piramide:

volumen pravilne četverostrane piramide

$$V = \frac{B \cdot v}{3} = \frac{a^2 \cdot v}{3},$$

a njezino oplošje:

volumen pravilne četverostrane piramide

$$O = B + P = a^2 + 2av_1.$$

Dijagonalni presjek piramide je presjek piramide ravninom koja prolazi kroz dva bočna brida piramide i sadrži jednu dijagonalu baze piramide.

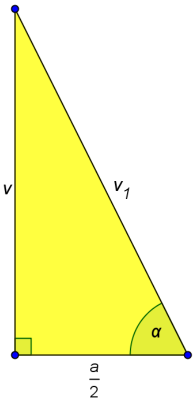
dijagonalni presjek piramide

Dijagonalni presjek pravilne četverostrane piramide je jednakokračan trokut osnovice duljine d, gdje je d duljina dijagonale baze i visine duljine v pa je njegova površina:

$$P_d = \frac{d \cdot v}{2}.$$

Primjer 1. Izračunajmo volumen i oplošje pravilne četverostrane piramide ako je duljina njezine visine 14 cm i mjera kuta između pobočke i ravnine baze $71°$.

Zadano je $a = 14$ cm i $\alpha = 71°$. Uočimo pravokutan trokut u kojem nam se pojavljuju zadani kut i iscrtajmo ga:



Po definiciji funkcije tangens dobivamo:

$$tg\alpha = \frac{v}{\frac{a}{2}}$$

iz čega je:

$$v = \frac{a}{2} \cdot tg\alpha = \frac{14}{2} \cdot tg71^\circ = 20.33 \text{ cm.}$$

Slično, po definiciji funkcije sinus dobivamo:

$$\sin\alpha = \frac{v}{v_1}$$

pa je

$$v_1 = \frac{v}{\sin\alpha} = \frac{20.33}{\sin 71^\circ} = 21.5 \text{ cm.}$$

Sada je volumen:

$$V = \frac{a^2 \cdot v}{3} = \frac{14^2 \cdot 20.33}{3} = 1328.23 \text{ cm}^3$$

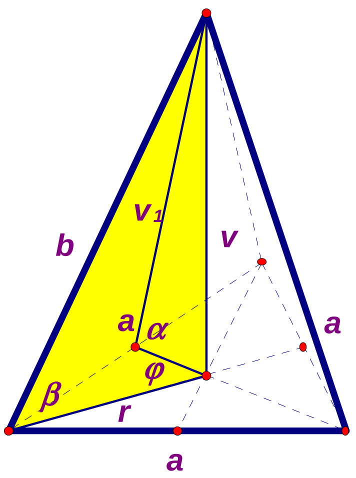
i oplošje:

$$O = a^2 + 2av_1 = 14^2 + 2 \cdot 14 \cdot 21.5 = 798 \text{ cm}^2.$$

4.3.2. PRAVILNA TROSTRANA PIRAMIDA

Pravilna trostrana piramida je uspravna piramida kojoj je baza jednakostraničan trokut.

pravilna trostrana piramida



Označimo:

a ... duljina osnovnog brida
b ... duljina bočnog brida
v ... duljina visine piramide
v_1 ... duljina visine pobočke
α ... kut između pobočke i ravnine baze
β ... kut između bočnog brida i ravnine baze

$r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ … duljina polumjera bazi opisane kružnice

$\rho = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ … duljina polumjera bazi upisane kružnice

Budući da je baza jednakostraničan trokut vrijedi:

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Pobočje čine tri jednakokračna trokuta osnovice duljine a i visine duljine v_1 pa je

$$P = 3 \cdot \frac{av_1}{2}.$$

Sada je volumen pravilne trostrane piramide:

volumen pravilne trostrane piramide

$$V = \frac{B \cdot v}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v,$$

a njezino oplošje:

oplošje pravilne trostrane piramide

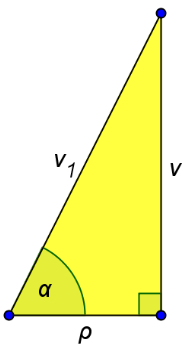
$$O = B + P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{a \cdot v_1}{2}.$$

Primjer 1. Izračunaj oplošje pravilne trostrane piramide ako je njezin volumen $180\sqrt{3}$ cm³, a duljina osnovnog brida 12 cm.

Zadano je $V = 180\sqrt{3}$ cm³ i $a = 12$ cm. Iz formule za volumen najprije računamo duljinu visine:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \cdot v = 180\sqrt{3},$$

iz čega dobivamo $v = 15$ cm.
Uočimo i iscrtajmo pravokutan trokut koji povezuje duljinu osnovnog brida a, duljinu visine piramide v i duljinu visine pobočke v_1:



Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$v_1^2 = \rho^2 + v^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{12\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 15^2 = 237,$$

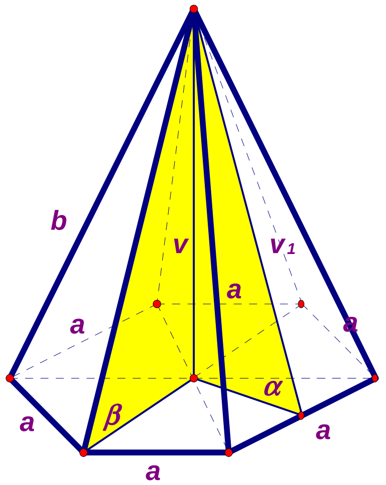
iz čega je $v_1 = 15.39$ cm.

Sada je: $O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{a \cdot v_1}{2} = \frac{15^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{15 \cdot 15.39}{2} = 559.13$ cm².

4.3.3. PRAVILNA ŠESTEROSTRANA PIRAMIDA

Pravilna šesterostrana piramida je uspravna prizma kojoj je baza pravilan šesterokut.

pravilna šesterostrana piramida



Označimo:

a ... duljina osnovnog brida
b ... duljina bočnog brida
v ... duljina visine piramide
v_1 ... duljina visine pobočke
α ... kut između pobočke i ravnine baze
β ... kut između bočnog brida i ravnine baze

Budući da je baza pravilan šesterokut koji sa sastoji od šest jednakostraničnih trokuta stranice duljine a imamo:

$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Pobočje čine šest jednakokračna trokuta osnovice duljine a i visine duljine v_1 pa je:

$$P = 6 \cdot \frac{av_1}{2} = 3av_1.$$

Sada je volumen pravilne trostrane piramide:

$$V = \frac{B \cdot v}{3} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot v,$$

odnosno

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot v,$$

volumen pravilen šesterostrane piramide

a njezino oplošje:

$$O = B + P = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3av_1.$$

oplošje pravilne šesterostrane piramide

Neka su d_1 i d_2 duljine dulje i kraće dijagonale baze (pogledajte kod pravilne šesterostrane prizme). Tada je $d_1 = 2a$ i $d_2 = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Veći dijagonalni presjek je jednakokračan trokut osnovice duljine d_1 i visine v pa je njegova površina:

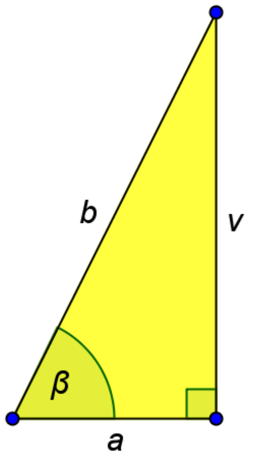
$$P_{d_1} = \frac{d_1 \cdot v}{2}.$$

Manji dijagonalni presjek je jednakokračan trokut osnovice duljine d_2 i visine v pa je njegova površina:

$$P_{d_2} = \frac{d_2 \cdot v}{2}.$$

Primjer 1. Izračunaj volumen i oplošje pravilne šesterostrane piramide kojoj je duljina osnovnog brida 8 cm i duljina bočnog brida 17 cm. Kolika je mjera kuta između bočnog brida i ravnine baze?

Budući da su dani podaci $a = 8$ cm i $b = 17$ cm, uočimo i iscrtajmo pravokutan trokut koji ih povezuje:



Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$v^2 = b^2 - a^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225,$$

iz čega je $v = 15$ cm.

Sada je:

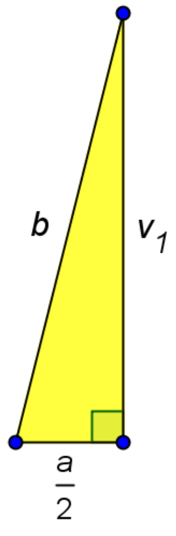
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot v = \frac{8^2\sqrt{3}}{2} \cdot 15 = 480\sqrt{3} = 831.38 \text{ cm}^3.$$

Mjeru traženog kuta možemo izračunati iz istog trokuta po npr. definiciji funkcije kosinus:

$$\cos\beta = \frac{a}{b} = \frac{8}{17} = 0.47059$$

pa je $\beta = 61°55'39''$.

Da bi izračunali oplošje piramide, moramo najprije izračunati duljinu visine pobočke v_1. Uočimo pravokutan trokut koji povezuje podatke a, b i v_1 (polovica pobočke):



Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$v_1^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 17^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 289 - 16 = 273,$$

iz čega je $v_1 = 16.52$ cm.

Sada je:

$$O = 3 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 8 \cdot 16.52 = 96\sqrt{3} + 396.48 = 562.76 \text{ cm}^2.$$

4.4. VALJAK

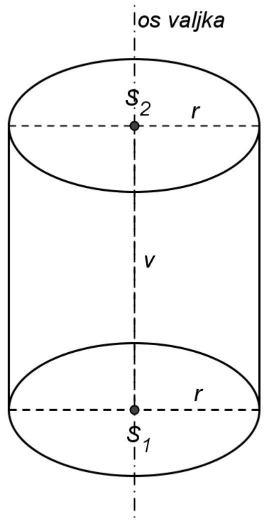
U odjeljku 4.1. definirali smo valjak kao cilindar kojemu je baza krug.

Valjak je geometrijsko tijelo omeđeno dvama sukladnim krugovima koji leže u paralelnim ravninama i koje se nazivaju **baze valjka** i dijelom zakrivljene plohe koju se naziva **plašt valjka**.

valjak

baze valjka

plašt valjka



Označimo:

r ... duljina polumjera baza valjka
v ... duljina visine valjka
S_1, S_2 … središta baza valjka

Os valjka je pravac koji prolazi središtem baza S_1 i S_2.
Izvodnica valjka je najdulja dužina koja je paralelna s osi valjka i pripada plaštu valjka.

os valjka

izvodnica valjka

Kažemo da je valjak **uspravan** ako mu je os okomita na ravninu baze. U suprotnom, riječ je o **kosom** valjku.

Visina valjka je udaljenost ravnina u kojima leže baze valjka.

visina valjka

Baza valjka je krug polumjera duljine r i površine:

$$B = r^2\pi .$$

Razvijemo li plašt valjka u ravninu, dobit ćemo pravokutnik kojemu su stranice duljine $o = 2r\pi$ (opseg baze) i v. Njegova je površina:

$$P = 2r\pi v .$$

Budući da je valjak cilindar, njegov volumen računamo po istoj polaznoj formuli kao i volumen prizme:

$$V = B \cdot v = r^2\pi v .$$

volumen valjka

Slično i oplošje valjka:

$$O = 2B + P = 2r^2\pi + 2r\pi v = 2r\pi \cdot (r + v),$$

odnosno

$$O = 2r\pi \cdot (r + v).$$

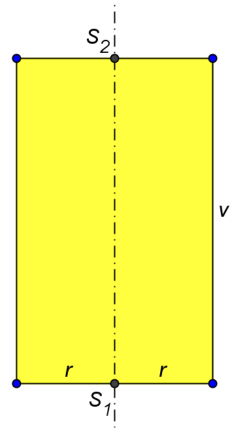
oplošje valjka

Osni presjek valjka je presjek valjka ravninom koja sadrži os valjka.

osni presjek valjka

Primjer 1. Koliko litara vode stane u posudu u obliku uspravnog valjka kojemu je površina baze 64π cm², a površina osnog presjeka 80 cm²?

Zadano je $B = 64\pi$ cm² i $P_{op} = 80$ cm². Iz $B = r^2\pi$, odnosno $r^2\pi = 64\pi$ dobivamo duljinu polumjera baze $r = 8$ cm.
Iscrtajmo osni presjek valjka:



Osni presjek je pravokutnik stranica duljine $2r$ i v pa je njegova površina:

$$P_{op} = 2rv .$$

Sada iz $2 \cdot 8 \cdot v = 80$, dobivamo $v = 5$ cm.

Volumen valjka je:

$$V = r^2\pi v = 8^2\pi \cdot 5 = 320\pi = 1005.31 \text{ cm}^3.$$

Preračunajmo ga u litre:

$$V = 1.00531 \text{ dm}^3 = 1.005 \text{ l} \approx 1 \text{ l}.$$

4.5. STOŽAC

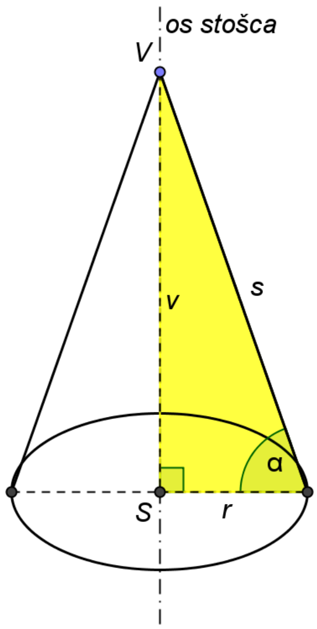
U odjeljku 4.1. definirali smo stožac kao konus kojemu je baza krug.

Stožac je geometrijsko tijelo omeđeno krugom, koji se naziva **baza stošca**, i dijelom zakrivljene plohe koja se naziva **plašt stošca**.

stožac

baza stošca

plašt stošca



Označimo:

r ... duljina polumjera baze stošca
v ... duljina visine stošca
s … duljina izvodnice stošca
α … mjera kuta između izvodnice i ravnine baze
S … središte baze stošca

Os stošca je pravac koji prolazi središtem baze S i vrhom V stošca.
Izvodnica stošca je dužina koja spaja vrh stošca s bilo kojom točkom ruba baze (kružnice koja omeđuje bazu).

os stošca

izvodnica stošca

Kažemo da je stožac **uspravan** ako mu je os okomita na ravninu baze. U suprotnom, riječ je o **kosom** stošcu.

visina stošca

nožište visine

Visina stošca je udaljenost vrha stošca od ravnine njegove baze, tj. udaljenost vrha stošca od njegove ortogonalne projekcije na ravninu baze, točke koju nazivamo **nožište** visine.
Kažemo i da je stožac uspravan ako mu je nožište visine u središtu baze.
Izvodnice uspravnog stošca jednake su duljine.

Baza stošca je krug polumjera duljine r i površine:

$$B = r^2\pi .$$

Razvijemo li plašt stošca u ravninu, dobit ćemo kružni isječak polumjera duljine s i kružnog luka duljine $o = 2r\pi$ (opseg baze). Njegova je površina:

$$P = \frac{s \cdot 2r\pi}{2} = r\pi s .$$

Budući da je stožac konus, njegov volumen računamo po istoj polaznoj formuli kao i volumen piramide:

volumen stošca

$$V = \frac{B \cdot v}{3} = \frac{r^2\pi \cdot v}{3} .$$

Slično i oplošje stošca:

$$O = B + P = r^2\pi + r\pi s ,$$

odnosno

oplošje stošca

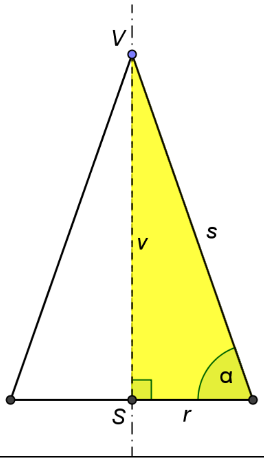
$$O = r\pi \cdot (r + s) .$$

osni presjek stošca

Osni presjek stošca je presjek stošca ravninom koja sadrži os stošca.

Primjer 1. Duljina polumjera baze uspravnog stošca je 48 cm, a površina njegovog plašta 3504π cm². Izračunajmo volumen tog stošca i mjeru kuta između njegove izvodnice i ravnine baze. Kolika je površina njegovog osnog presjeka?

Zadano je $r = 48$ cm i $P = 3504\pi$ cm². Iz $P = r\pi s$, odnosno $48\pi s = 3504\pi$ slijedi $s = 73$ cm.
Iscrtajmo osni presjek stošca:



Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$v^2 = s^2 - r^2 = 73^2 - 48^2 = 3025 ,$$

pa je:

$$v = 55 \text{ cm}.$$

Sada je volumen:

$$V = \frac{r^2\pi v}{3} = \frac{48^2 \cdot \pi \cdot 55}{3} = 42240\pi = 132700.87 \text{ cm}^3.$$

Iz definicije funkcije kosinus slijedi:

$$\cos\alpha = \frac{r}{s} = \frac{48}{73} = 0.65753,$$

pa je $\alpha = 48°53'16''$.

Osni presjek stošca je jednakokračan trokut kojemu je duljina osnovice $2r$ i duljina visine v pa je njegova površina:

$$P_{op} = \frac{2r\cdot v}{2} = rv = 48\cdot 55 = 2640 \text{ cm}^2.$$

4.6. KUGLA I SFERA

Neka je S čvrsta točka prostora i r pozitivan realan broj.

kugla

Kugla je skup svih točaka prostora čija je udaljenost do točke S jednaka ili manja od r. Točka S je **središte**, a r duljina **polumjera** (radijusa) **kugle**.

središte kugle

polumjer kugle

sfera

Sfera je skup svih točaka prostora čija je udaljenost od točke S jednaka r

Volumen kugle polumjera r dan je formulom:

volumen kugle

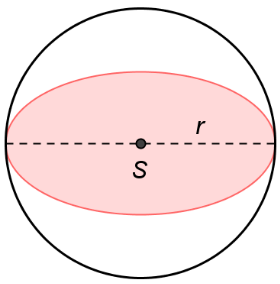
$$V = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Oplošje kugle polumjera r (tj. površina sfere polumjera r) dano je formulom:

oplošje kugle

$$O = 4r^2\pi.$$

Primjer 1. Izračunajmo oplošje kugle ako je njezin volumen $\frac{\pi}{6}$ cm³.



Uvrštavanjem u formulu za volumen kugle dobivamo:

$$\frac{4}{3}r^3\pi = \frac{\pi}{6},$$

odnosno

$$r^3 = \frac{1}{8}$$

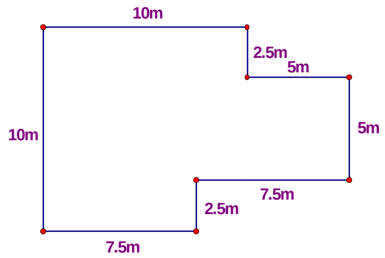
pa je $r = \frac{1}{2}$ cm.

Sada je

$$O = 4r^2\pi = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi = \pi \text{ cm}^2.$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Izračunajte oplošje i volumen kocke kojoj je površina dijagonalnog presjeka $144\sqrt{2}$ cm².
2. Izračunajte volumen kvadra ako su duljine njegovih osnovnih bridova 7 cm i 9 cm, a njegovo oplošje 286 cm².
3. Izračunajte oplošje i volumen pravilne četverostrane prizme ako je duljina dijagonale baze $5\sqrt{2}$ cm, a mjera kuta koji prostorna dijagonala zatvara s ravninom baze 71°17'.
4. Oplošje pravilne trostrane prizme iznosi iznosi $110\sqrt{3}$ cm², a duljina osnovnog brida je 10 cm. Izračunajte volumen prizme.
5. Volumen pravilne šesterostrane prizme je $270\sqrt{3}$ cm³, a duljina osnovnog brida je 6 cm. Izračunajte oplošje prizme.
6. Dno bazena ima oblik pravilnog šesterokuta. Duljina osnovnog brida je 2 m. Bazen može primiti 100 hl vode. Kolika je duljina visina bazena?
7. Izračunajte volumen i oplošje pravilne četverostrane piramide ako je duljina njezinog osnovnog brida 8 cm i mjera kuta između pobočke i ravnine baze 65°56'.
8. Izračunajte volumen i oplošje pravilne četverostrane piramide ako je duljina njezine visine 14 cm i mjera kuta između pobočke i ravnine baze 71°17'.
9. Izračunajte oplošje i obujam pravilne četverostrane piramide ako je duljina pobočnog brida $b=8$ cm i duljina visine pobočke $v_1=6$ cm.
10. Izračunajte oplošje i obujam pravilne četverostrane piramide ako je duljina visine piramide $v=8$ cm i duljina pobočnog brida $b=10$ cm.
11. Izračunajte oplošje pravilne trostrane piramide ako je njezin volumen $180\sqrt{3}$ cm³, a duljina osnovnog brida 12 cm.
12. Izračunajte volumen pravilne trostrane piramide ako je površina baze $B=243\sqrt{3}$ cm², a duljina visine pobočke $v_1=15$ cm.
13. Izračunajte volumen i oplošje pravilne šesterostrane piramide ako je duljina osnovnog brida 8 cm i duljina bočnog brida 17 cm. Kolika je mjera kuta između bočnog brida i ravnine baze?
14. Koliko litara vode stane u posudu u obliku uspravnog valjka kojemu je opseg baze 20π cm, a duljina visine 32 cm? Kolika je površina osnog presjeka tog valjka?
15. Koliko litara vode stane u posudu u obliku uspravnog valjka kojemu je površina baze 81π cm², a površina osnog presjeka 108 cm²?
16. Duljina polumjera baze uspravnog stošca je 12 cm, a duljina njegove visine 35 cm. Izračunajte oplošje tog stošca i mjeru kuta između njegove izvodnice i ravnine baze.
17. Duljina polumjera baze uspravnog stošca je 16 cm, a površina njegovog plašta 1040π cm² . Izračunajte volumen tog stošca i mjeru kuta između njegove izvodnice i ravnine baze.
18. Izračunajte oplošje kugle ako je njezin volumen $\frac{9}{16}\pi$ cm³.
19. Koliki je volumen stana čiji je tlocrt prikazan na slici i čija je visina 3.6 m:



20. Limenka boje sadrži 1.5l. Sva boja iz limenke je ravnomjerno je nanesena na zid površine 120 cm². Kolika je debljina sloja boje na zidu?

KONTROLNA ZADAĆA – ZADACI ZA SAMOPROVJERU ZNANJA

PRIMJER PISANOG ISPITA ZNANJA IZ MATEMATIKE

1. a) U proizvodnji neke robe ima 4% otpadaka. Ako je proizvedeno 52000 komada robe, koliko je otpadaka?
   b) Od 4426000 građana Hrvatske, kajkavskim narječjem govori 1463000 ljudi. Postotkom izrazite zastupljenost kajkavskog narječja.

2. Miješanjem pšenice nepoznate cijene s 250 kg pšenice cijene 1.8 kn/kg dobili smo 1000 kg mješavine pšenice po cijeni 2.1 kn/kg. Izračunajte nepoznatu cijenu pšenice.

3. Koji iznos bismo morali 10. studenog uložiti u banku da bismo, uz kamatnu stopu 4%, 5. travnja podigli 824 kuna kamata?

4. Riješite jednadžbe:

a) $32^{-x+2}=\left(\frac{1}{8}\right)^{2-5x}$, b) $0.04\cdot\sqrt[4]{25^{5x-1}}=125^{1-x}$.

5. Izračunajte (primjenom pravila za računanje s logaritmima):
   a) $\log_2\frac{1}{32}-4\cdot\log_5 5+\log_3 1-5\cdot\log 10^{-2}=$
   b) $\log_2 160+\log_2\frac{1}{5}=$
   c) $\frac{\log 400}{2+\log_2 5}=$

6. a) Primjenom pravila za računanje logaritmima zapišite kao zbroj i/ili razliku logaritama pomnoženih realnim brojem: $\log_5\frac{625a^7b^9c^{11}}{d^{13}}=$
   b) Primjenom pravila za računanje logaritmima zapišite pod jednim logaritmom i sredi izraz: $3+5\log_3 2+7\log_3 x^3-\frac{1}{5}\log_3 x^5y^{15}=$

7. Riješite jednadžbe:

a) $\log_x\frac{16}{81}=-4$, b) $\log_{\frac{1}{7}}(4x-1)=-1$,

c) $\log(x+6)+\log(x+4)=2\log(2-x)$, d) $\log_2(x+2)=6-\log_2(x+14)$.

8. Vrh tornja vidi se pod kutom od 15° iz to čke udaljene 125 m od podnožja tornja. Odredite visinu tornja.

9. Izračunajte opseg i površinu jednakokračnog trokuta ako je mjera kuta uz njegovu osnovicu 53°35', a duljina visine 6.4 cm.

10. Koliki je kut među dijagonalama pravokutnika ako su duljine njegovih stranica 11 cm i 4 cm?

11. Izračunajte oplošje, volumen i površinu dijagonalnog presjeka kocke ako je duljina njezine

prostorne dijagonale $\sqrt{75}$ cm.

12. Oplošje pravilne trostrane prizme iznosi $84\sqrt{3}$ cm², a duljina osnovnog brida je $4\sqrt{3}$ cm. Izračunajte volumen prizme.

13. Izračunajte volumen i oplošje pravilne četverostrane piramide ako je duljina njezinog osnovnog brida 8 cm i mjera kuta između pobočke i ravnine baze 65°56'.

14. Izračunajte volumen pravilne šesterostrane piramide ako je duljina osnovnog brida 6 cm i duljina bočnog brida 10 cm. Kolika je mjera kuta između bočnog brida i ravnine baze?

15. Koliko litara vode stane u posudu u obliku uspravnog valjka kojemu je površina baze 81π cm², a površina osnog presjeka 108 cm²?

16. Duljina polumjera baze uspravnog stošca je 39 cm, a duljina njegove visine 80 cm. Izračunajte oplošje tog stošca i mjeru kuta između njegove izvodnice i ravnine baze.

KORIŠTENA LITERATURA:

[1] Ivan Mrkonjić, *Matematika u struci* 2, udžbenik sa zbirkom zadataka, Neodidacta, Zagreb, 2007.

[2] Lj. Kelava-Račić – Z. Šikić, *Matematika* 2, udžbenik sa zbirkom zadataka za strukovne škole, I. i II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2007.