ŠKOLA ZA CESTOVNI PROMET
Zagreb

NASTAVNO PISMO
ZA PROGRAME OBRAZOVANJA ODRASLIH

Nastavni predmet:

MATEMATIKA

1. RAZRED

Zanimanje:

VOZAČ MOTORNOG VOZILA

Autor: Marija Mlinarević, prof.

Zagreb, 2010.

KAKO KORISTITI NASTAVNO PISMO

Cijenjeni polaznici,

Svrha nastavnog pisma je olakšati Vam organizaciju samostalnog učenja, pripremanje i polaganje ispita te uspješno završavanje upisanog programa.

Na početku nastavnog pisma nalazi se sadržaj koji daje najkraći uvid u strukturu teksta, odnosno orijentacijski uvid u nastavne cjeline i jedinice koje su razrađene u nastavnom pismu i s kojima ćete se upoznati.

U razradi nastavnih cjelina definirani su novi pojmovi i objašnjena pravila i postupci koje koristimo u rješavanju zadataka. Slijedi niz detaljno objašnjenih primjera, popraćenih skicama i slikama, kroz koje uvježbavamo uvedeno. Pojmovi i pravila koje uvodimo, zbog lakšeg i bržeg snalaženja, istaknuti su na marginama. Prilikom učenja na margine možete zapisivati svoje osobne bilješke jer je nastavno pismo zamišljeno kao radni udžbenik.

Iza svake nastavne cjeline nalaze se zadaci za vježbu koje je dobro riješiti nakon proučenih primjera, posebno zato što se slični zadaci pojavljuju na ispitu. Na samome kraju nastavnog pisma nalazi se primjer ispita koji će Vam poslužiti za uvježbavanje gradiva i završnu samoprovjeru znanja. Sretno!

SADRŽAJ

1. SKUPOVI BROJEVA

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Zašto i kojim redom uvodimo skupove brojeva?*
2. *Kako vješto obavljati elementarne računske operacije u svakodnevnom životu? Gdje nam sve pomaže znanje o skupovima brojeva?*

1.1. SKUP PRIRODNIH BROJEVA

Brojevi kojima se služimo za brojanje nazivaju se **prirodi brojevi**. Skup svih prirodnih brojeva označavamo oznakom $\mathbf{N}$. Dakle,

skup prirodnih brojeva

$$\mathbf{N}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,\ldots\}.$$

Najveći prirodan broj ne postoji, ali postoji **najmanji** i to **je broj 1**. Uočimo da broj **nula nije prirodan broj**, tj.

$$0 \notin \mathbf{N}.$$

svojstva skupa prirodnih brojeva

Skup čiji su elementi svi prirodni brojevi i broj 0 označavamo $\mathbf{N_0}$ (čitamo: en nula).

$$\mathbf{N_0}=\{1,2,3,4,5,6,\ldots\}=\{0\}\cup\mathbf{N}.$$

Svaki prirodan broj ima **sljedbenika**. Sljedbenik prirodnog broja n je broj $n+1$. Svaki prirodan broj, osim broja 1, ima svog **prethodnika**. Prethodnik prirodnog broja $n \neq 1$ je broj $n-1$.

parni i neparni brojevi

Česta je podjela prirodnih brojeva na **parne** i **neparne brojeve**. Parni brojevi su $2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$, a neparni $1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ Općenito, parni su brojevi brojevi oblika $2n$, a neparni brojevi oblika $2n-1$, gdje je $n \in \mathbf{N}$.

Prirodne brojeve zapisujemo pomoću znamenaka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9.

Primjer 1.

a) Ispišimo sve neparne dvoznamenkaste brojeve kojima je znamenka desetica 4: 41, 43, 45, 47 i 49.
b) Napišimo najveći parni peteroznamenkasti broj: $99\,998$.
c) Napišimo najmanji deseteroznamenkasti broj kojemu su sve znamenke različite: $1\,023\,456\,789$.

U skupu $\mathbf{N}$ definirane su operacije **zbrajanja** i **množenja**.

Kažemo da je **prirodan broj a djeljiv prirodnim brojen b** ako postoji prirodan broj k takav da je $a=k\cdot b$. Kaže se i „b dijeli a“, oznaka: $b|a$.

Tada je a **višekratnik** broja b, a b **djelitelj** (faktor) broja a.

Najveći zajednički djelitelj (mjera) prirodnih brojeva a, b, …, oznaka $NZD(a,b,\ldots)$, je najveći broj koji dijeli svaki od brojeva a, b, …

najveći zajednički djelitelj

Najmanji zajednički višekratnik prirodnih brojeva a, b, …, oznaka $nzv(a,b,\ldots)$, je najmanji prirodan broj koji je djeljiv sa svakim od brojeva a, b, …

najmanji zajednički višekratnik

1.1.1. ZBRAJANJE PRIRODNIH BROJEVA

U jednakosti $564+289=853$, brojeve 564 i 289, tj. brojeve koje zbrajamo nazivamo **pribrojnicima**, a rezultat zbrajanja, tj. broj 853 nazivamo **zbroj**.

Svojstva zbrajanja:

svojstva zbrajanja prirodnih brojeva

1. **svojstvo komutativnosti zbrajanja**:
   Za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi: $a+b=b+a$.
2. **svojstvo asocijativnosti zbrajanja**:
   Za svaka tri prirodna broja a, b i c vrijedi $a+(b+c)=(a+b)+c$.

Primjer 1. Provjerimo svojstva zbrajanja:

a) $36+42=42+36$
Rezultat zbrajanja lijeve strane je $36+42=78$, kao i rezultat zbrajanja desne strane $42+36=78$.

b) $23+(31+45)=(23+31)+45$
Ovdje je zagradama naznačen redoslijed računskih operacija. Na desnoj strani dobivamo $23+(31+45)=23+76=99$, a na lijevoj strani $(23+31)+45=44+45=99$. Dakle, vrijedi jednakost.
To svojstvo vrijedi i za zbrajanje četiriju i više brojeva.

Primjer 2. Na najjednostavniji način (koristeći svojstva zbrajanja prirodnih brojeva) izračunajmo:

$$387+1589+113+1411=(387+113)+(1589+1411)=500+3000=3500.$$

1.1.2. MNOŽENJE PRIRODNIH BROJEVA

U jednakosti $325\cdot 64=20800$, brojeve 325 i 64, tj. brojeve koje množimo nazivamo **množitelji** ili **faktori**, a rezultat množenje, tj. broj 20800 nazivamo **umnožak** ili **produkt**.

Svojstva množenja:

1. svojstvo **komutativnosti** množenja:
   Za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi: $a \cdot b = b \cdot a$.
2. svojstvo **asocijativnosti** množenja:
   Za svaka tri prirodna broja a, b i c vrijedi $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
3. svojstvo **distributivnosti množenja prema zbrajanju**:
   Za svaka tri prirodna broja a, b i c vrijedi $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, odnosno $c \cdot (a+b) \cdot c = c \cdot a + c \cdot b$.

svojstva množenja prirodnih brojeva

Primjer 1. Provjerimo svojstva množenja:

a) $344 \cdot 17 = 17 \cdot 344$
   Rezultat množenja lijeve strane je $344 \cdot 17 = 5848$, kao i rezultat množenja desne strane $17 \cdot 344 = 5848$.

b) $5 \cdot (7 \cdot 2) = (5 \cdot 7) \cdot 2$
   Ovdje je zagradama naznačen redoslijed računskih operacija. Na desnoj strani dobivamo $5 \cdot (7 \cdot 2) = 5 \cdot 14 = 70$, a na desnoj strani $(5 \cdot 7) \cdot 2 = 35 \cdot 2 = 70$. Dakle, vrijedi jednakost.
   To svojstvo vrijedi i za množenje četiriju i više brojeva.

c) Na dva načina izračunajmo $(6+9) \cdot 4$.
   Najprije zbrojimo pa pomnožimo: $(6+9) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60$.
   Sada najprije pomnožimo pa zbrojimo: $(6+9) \cdot 4 = 6 \cdot 4 + 9 \cdot 4 = 24 + 36 = 60$.

Primjer 2. Na najjednostavniji način (koristeći svojstva množenja prirodnih brojeva) izračunajmo:

$$8 \cdot 6 \cdot 125 \cdot 9 = (9 \cdot 6) \cdot (125 \cdot 8) = 54 \cdot 1000 = 54000.$$

1.2. SKUP CIJELIH BROJEVA

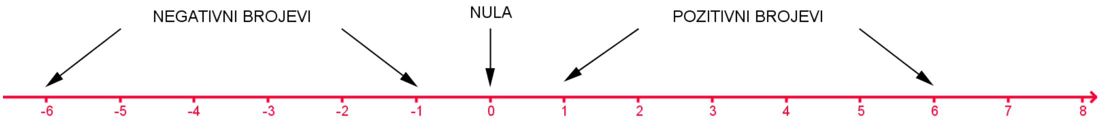
Već smo spomenuli da su u skupu prirodnih brojeva definirane operacije zbrajanja i množenja, tj. zbroj i umnožak prirodnih brojeva uvijek je prirodan broj (kažemo da je skup prirodnih brojeva zatvoren na zbrajanje i množenje). Razlozi praktičnih problema (temperatura ispod ništice, visina vodostaja manja od uobičajene, manjak na računu i sl.) nametnuli su potrebu za uvođenjem operacije suprotne zbrajanju, operacije oduzimanja.

Rezultat oduzimanja $a - b$ kada je $a < b$ nije prirodan broj. To nas dovodi do potrebe za proširenjem skupa prirodnih brojeva negativnim brojevima i nulom. Dobiveni skup je **skup cijelih brojeva** kojeg označavamo slovom **Z**, tj:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -4, -3, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

skup cijelih brojeva

Smjestimo cijele brojeve na brojevni pravac:



Kažemo da **pozitivni cijeli brojevi** imaju pozitivan predznak, a **negativni brojevi** negativan predznak.

suprotni brojevi

Brojeve -2 i 2, -10 i 10, -234 i 234 nazivamo **suprotnim brojevima**. Na brojevnom su pravcu suprotni brojevi jednako udaljeni od nule. Za brojeve -5 i 5 ta udaljenost iznosi 5 jedinica. Kažemo da je 5 apsolutna vrijednost brojeva -5 i 5 što označavamo:

$$|5| = 5 \text{ i } |-5| = 5 .$$

apsolutna vrijednost broja

Apsolutna vrijednost broja je njegova udaljenost od nule na brojevnom pravcu.

1.2.1. ZBRAJANJE I ODUZIMANJE CIJELIH BROJEVA

Kod zbrajanja cijelih brojeva razlikujemo tri slučaja:

pravila zbrajanja cijelih brojeva

1. Pozitivne cijele brojeve zbrajamo kao prirodne brojeve:
$$12 + 13 = 25 .$$
2. Negativne cijele brojeve zbrajamo tako da im zbrojimo apsolutne vrijednosti, a zbroju dodajemo negativan predznak:
$$-11 + (-17) = -28 .$$
3. Cijele brojeve različitih predznaka zbrajamo tako da od veće apsolutne vrijednosti oduzmemo manju apsolutnu vrijednost, a rezultatu dajemo predznak broja veće apsolutne vrijednosti:
$$-12 + 13 = 1 ,$$
$$11 + (-17) = -6 .$$

Zbroj suprotnih cijelih brojeva jednak je nuli:

$$5 + (-5) = 0 .$$

Oduzimanje cijelih brojeva svodi se na zbrajanje suprotnog broja:

$$5 - 13 = 5 + (-13) = -8 .$$

Zbrajanje cijelih brojeva je komutativno i asocijativno. Oduzimanje cijelih brojeva nije komutativno.

Posebnu pažnju ovdje treba posvetiti računanju sa zagradama:

pravila računanja sa zagradama

Ako je ispred zagrade znak zbrajanja, zagradu izostavljamo, a predznaci članova u zagradi ostaju nepromijenjeni.
Ako je ispred zagrade znak oduzimanja, pri izostavljanju zagrade članovi u zagradi mijenjaju predznake.

Ako se u zadatku pojavi više zagrada, redoslijed izostavljanja zagrada je od unutarnje zagrade prema vanjskoj. Najčešće je to u oznakama $(\ )$, $[\ ]$ i $\{\ \}$.

Primjer 1. Izostavimo zagrada pa izračunajmo:

$$
\begin{aligned}
&-[-(34+12)-(2-34)]-\{-16-[-7+(-4-16+7)]\}=\\
&=-[-34-12-2+34]-\{-16-[-7-4-16+7]\}=\\
&=34+12+2-34-\{-16+7+4+16-7\}=\\
&=34+12+2-34+16-7-16+7=14.
\end{aligned}
$$

Nakon što smo izostavili zagrade, dobro je u računu uočiti suprotne brojeve.

1.2.2. MNOŽENJE I DIJELJENJE CIJELIH BROJEVA

Množenje cijelih brojeva svodi se na množenje njihovih apsolutnih vrijednosti, a predznak rezultata dajemo po pravilu: umnožak cijelih brojeva jednakih predznaka pozitivan je broj, a umnožak cijelih brojeva različitih predznaka negativan je broj, tj:

pravila množenja cijelih brojeva

$$
\begin{aligned}
+\cdot+&=+\\
-\cdot-&=+\\
-\cdot+&=-\\
+\cdot-&=-
\end{aligned}
$$

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $-22\cdot5=-110$,
b) $6\cdot(-25)=-150$,
c) $-8\cdot(-12)=96$.

Množenjem s 1 broj se ne mijenja: $a\cdot1=1\cdot a=a$.
Množenjem s -1, dobivamo suprotni broj: $a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a$.
Za svaki cijeli broj a vrijedi: $a\cdot0=0\cdot a=0$.

Za množenje cijelih brojeva vrijede svojstva komutativnosti i asocijativnosti. Također vrijedi svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju.

Dijeljenje cijelih brojeva povezano je s množenjem cijelih brojeva:

$a:b=c$ ako je $a=b\cdot c$.

Količnik cijelih brojeva jednakih predznaka pozitivan je broj, a različitih predznaka negativan broj.

Pogledajmo primjere gdje osim na ispravan način rada sa zagradama moramo paziti i na redoslijed računskih operacija, najprije množimo i dijelimo, a potom zbrajamo i oduzimamo.

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $(-23+19)\cdot(6-13)=-4\cdot(-7)=28$,
b) $(-23+19)\cdot 6-13=-4\cdot 6-13=-24-13=-37$,
c) $-23+19\cdot(6-13)=-23+19\cdot(-7)=-23-133=-156$,
d) $-23+19\cdot 6-13=-23+104-13=68$.

Primjer 3. Izračunajmo:

a) $-\{4+[-4-1\cdot(-3)-(3-5)-8]:7\}:(-3)=$
$=-\{4+[-4+3+2-8]:7\}:(-3)=-\{4+[-7]:7\}:(-3)=$
$=-\{4-1\}:(-3)=-3:(-3)=1,$
b) $-[-(3-7)\cdot(-6)]-(-11)+5\cdot[-3+25:(-5)]=$
$=-[-(-4)\cdot(-6)]+11+5\cdot[-3+(-5)]=-[-24]+11+5\cdot[-8]=$
$=24+11-40=-5.$

1.3. SKUP RACIONALNIH BROJEVA

Skup cijelih brojeva je zatvoren s obzirom na zbrajanje, množenje i oduzimanje. Drugim riječima, zbroj, umnožak i razlika cijelih brojeva uvijek je cijeli broj. Skup cijelih broje nije zatvoren na dijeljenje, računsku operaciju obrnutu od množenja; količnik dvaju cijelih brojeva nije uvijek cijeli broj. Zbog toga skup cijelih brojeva proširujemo do skupa racionalnih brojeva.

Količnici cijelih brojeva, poput $\frac{3}{5}$, $\frac{-13}{7}$, $\frac{2}{-15}$ su racionalni brojevi. Količnik bilo kojih dvaju cijelih brojeva racionalan je broj. Pritom moramo isključiti dijeljenje s nulom jer se nulom ne smije dijeliti.

Skup racionalnih brojeva označavamo slovom $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{a}{b}: a,b\in Z, b\neq 0\right\}.$$

skup racionalnih brojeva

Racionalan broj je negativan ako je broj negativan, a nazivnik pozitivan i obrnuto:

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

Ako je brojnik racionalnog broja jednak nuli, broj je jednak nuli:

$$\frac{0}{a}=0,\ a\in\ \mathbf{Z},\ a\neq 0.$$

standardni zapis racionalnog broja

Svaki se racionalan broj može zapisati u obliku razlomka kojemu je nazivnik prirodan broj. Kažemo da je racionalan broj tada zapisan u **standardnom obliku**.

1.3.1. PROŠIRIVANJE I SKRAĆIVANJE RACIONALNIH BROJEVA

Za svaki racionalan broj $\frac{a}{b}$ i svaki $k \in \mathbf{Z},\ k \neq 0$ vrijedi:

$$\xleftarrow{\text{PROŠIRIVANJE}}$$

$$\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}.$$

$$\xrightarrow[\text{SKRAĆIVANJE}]{}$$

Istaknutu jednakost možemo čitati dvostrano. Čitamo li je zdesna ulijevo, tada je riječ o proširivanju razlomka, a čitamo li je s lijeva udesno, tada govorimo o skraćivanju razlomaka.

Proširiti razlomak znači njegov brojnik i nazivnik pomnožiti jednakim brojem različitim od nule.
Skratiti razlomak znači njegov brojnik i nazivnik podijeliti jednakim brojem različitim od nule ako taj broj postoji.

proširivanje razlomaka

skraćivanje razlomaka

Proširivanjem svaki razlomak možemo zapisati sa željenim brojnikom ili nazivnikom.

Svaki se racionalan broj može skraćivanjem dovesti do **neskrativog** ili **do kraja skraćenog** razlomka, tj. razlomka u kojemu brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih djelitelja.

neskrativ razlomak

Primjer 1. Razlomak $\frac{2}{3}$ proširimo brojem:

a) $2:\ \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$,

b) $-3:\ \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot (-3)}{3 \cdot (-3)} = \frac{-6}{-9}$,

c) $-1:\ \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot (-1)}{3 \cdot (-1)} = \frac{-2}{-3}$.

Primjer 2. Prikažimo razlomak $\frac{3}{4}$ u obliku razlomka kojemu je nazivnik 48.

Potrebno je razlomak proširiti brojem 12: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 12}{4 \cdot 12} = \frac{36}{48}$.

Primjer 3. Zadane razlomke skratimo do neskrativih:

a) $\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3}$,

b) $\frac{-81}{90}=\frac{-9\cdot 9}{10\cdot 9}=\frac{-9}{10}$,

c) $\frac{4620}{819}=\frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}{3\cdot 3\cdot 7\cdot 13}=\frac{220}{39}$.

1.3.2. ZBRAJANJE I ODUZIMANJE RACIONALNIH BROJEVA

Prisjetimo se pravila za zbrajanje i oduzimanje racionalnih brojeva:

a) Zbrajanje i oduzimanje racionalnih brojeva jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b},\ \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}.$$

Razlomke jednakih nazivnika zbrajamo (oduzimamo) tako da nazivnik prepišemo, a brojnike zbrojimo (oduzmemo).

zbrajanje i oduzimanje razlomaka

b) Zbrajanje i oduzimanje racionalnih brojeva različitih nazivnika:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\ \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

Razlomke različitih nazivnika zbrajamo (oduzimamo) svođenjem na zajednički nazivnik. Za zajednički nazivnik možemo uzeti umnožak nazivnika. Računajući tako dobit ćemo ispravan rezultat, ali brojnik i nazivnik dobivenog rezultata vrlo često moći ćemo skratiti. Zbog toga, za zajednički nazivnik odabiremo najmanji zajednički višekratnik nazivnika.

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\frac{7}{8}-\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-5-3}{8}=\frac{-1}{8}$,

b) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 3+2\cdot 2}{6}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}$,

c) $\frac{4}{3}+\frac{7}{12}-\frac{5}{8}=\frac{4\cdot 8+7\cdot 2-5\cdot 3}{24}=\frac{32+14-15}{24}=\frac{31}{24}$.

Zbroj cijelog broja i razlomka često kraće zapisujemo bez znaka zbrajanja:

$2+\frac{3}{4}=2\frac{3}{4}$ i čitamo: „dva cijela i tri četvrtine“.

Tako zapisan zbroj cijelog broja i razlomka nazivamo **mješovitim brojem**.

mješoviti broj

pravi i nepravi razlomak

Kažemo da je razlomak **pravi** ako je njegov brojnik manji (po apsolutnoj vrijednosti) od nazivnika. Inače, za razlomak kažemo da je **nepravi**.

Nepravi razlomak možemo zapisati u obliku mješovitog razlomka dijeljenjem brojnika nazivnikom. Dobiveni količnik je cijeli dio, a ostatak brojnik razlomka.

Primjer 2. Mješoviti broj $4\frac{2}{11}$ zapišimo u obliku razlomka:

Prema navedenom imamo: $4\frac{2}{11}=4+\frac{2}{11}=\frac{4\cdot 11+2}{11}=\frac{46}{11}$.

Primjer 3. Razlomak $\frac{23}{6}$ zapišimo u obliku mješovitog broja:

Iz $23:6=3$ i ostatak 5 slijedi $\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$.

1.3.3. MNOŽENJE I DIJELJENJE RACIONALNIH BROJEVA

Prisjetimo se i pravila za množenje racionalnih brojeva:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

množenje razlomaka

Razlomke množimo tako da pomnožimo brojnik s brojnikom, a nazivnik s nazivnikom.

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}$,

b) $\frac{-5}{2}\cdot 3=\frac{-5\cdot 3}{2\cdot 1}=\frac{-15}{2}$,

c) $-2\frac{1}{8}\cdot\frac{-5}{2}=-\frac{17}{8}\cdot\frac{-5}{2}=\frac{-17\cdot(-5)}{8\cdot 2}=\frac{85}{16}=5\frac{5}{16}$,

d) $\frac{4}{25}\cdot\frac{5}{12}=\{skratimo\ \ razlomke\}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 1}{5\cdot 3}=\frac{1}{15}$.

Množenjem brojem 1 razlomak se ne mijenja: $\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$.

Množenjem razlomka nulom dobivamo nulu: $\frac{a}{b}\cdot 0=0$.

Recipročna vrijednost racionalnog broja $\frac{a}{b}$ je racionalni broj $\frac{b}{a}$.

recipročna vrijednost racionalnog broja

Primjer 2. Popunimo tablicu:

racionalan broj	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	3	$-\frac{7}{6}$	$3\frac{2}{5}$
recipročna vrijednost	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{5}{17}$

Razlomak $\frac{a}{b}$ dijelimo razlomkom $\frac{c}{d}$ tako da ga pomnožimo recipročnim razlomkom $\frac{d}{c}$:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

dijeljenje razlomaka

Primjer 3. Izračunajmo:

a) $\frac{4}{5}:\frac{7}{8}=\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}=\frac{32}{35}$,

b) $-\frac{8}{9}:4=-\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{2}{9}$,

c) $-3\frac{2}{7}:\left(-\frac{3}{14}\right)=-\frac{23}{7}\cdot\left(-\frac{14}{3}\right)=\frac{46}{3}=15\frac{1}{3}$.

Količnik dvaju razlomaka može se zapisati u obliku **dvojnog razlomka**:

dvojni razlomak

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Pritom brojeve a i d nazivamo **vanjskim**, a brojeve c i d **unutarnjim članovima** dvojnog razlomka.
Zapamtimo: dvojni razlomak rješavamo tako da umnožak vanjskih članova zapišemo u brojnik, a umnožak unutarnjih članova u nazivnik razlomka.

Pogledajmo nekoliko zadataka u kojima uvježbavamo pravilan redoslijed računskih operacija i pravilan račun sa zagradama.

Primjer 4. Izračunajmo:

a) $\frac{1}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{3}-\frac{5}{6}+\frac{1}{12}=\frac{4-10+1}{12}=-\frac{5}{12}$,

b) $\frac{3}{2}-\frac{5}{12}\cdot 3=\frac{3}{2}-\frac{5}{4}=\frac{6-5}{4}=\frac{1}{4}$,

c) $\frac{6}{5}-\frac{4}{5}\cdot\left\{\frac{3}{2}+\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{12}\right)\right]\cdot 3\right\}=\{\textit{iskoristimo a) i b) dio zadatka}\}=$

$=\frac{6}{5}-\frac{4}{5}\cdot\left\{\frac{3}{2}-\frac{5}{12}\cdot 3\right\}=\frac{6}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{6}{5}-\frac{1}{5}=\frac{5}{5}=1$.

Primjer 5. Izračunajmo:

a) $-\frac{14}{35}-\left(-\frac{22}{35}\right)-\frac{-1}{-35}=-\frac{14}{35}+\frac{22}{35}-\frac{1}{35}=\frac{7}{35}=\frac{1}{5}$,

b) $-\frac{2}{9}+4:\left(\frac{1}{2}-5\right)+3\frac{1}{9}:28=-\frac{2}{9}+4\cdot\frac{-2}{9}+\frac{28}{9}\cdot\frac{1}{28}=-\frac{2}{9}-\frac{8}{9}+\frac{1}{9}=-\frac{9}{9}=-1$,

c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\left\{-\frac{8}{3}:\left(6-\frac{16}{3}\right)-\frac{4}{5}\cdot\left[12-\left(2-\frac{34}{29}\right)\cdot\frac{29}{12}\right]\right\}=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\left\{-\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}-\frac{4}{5}\cdot\left[12-\frac{24}{29}\cdot\frac{29}{12}\right]\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\left\{-4-\frac{4}{5}\cdot[12-2]\right\}=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\left\{-4-\frac{4}{5}\cdot 10\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot\{-4-8\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot(-12)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

d) $\dfrac{\frac{13}{2}-\frac{8}{3}}{\frac{13}{2}+\frac{8}{3}}:\frac{46}{25}+\frac{3}{11}=\dfrac{\frac{39-16}{6}}{\frac{39+16}{6}}\cdot\frac{25}{46}+\frac{3}{11}=\dfrac{\frac{23}{6}}{\frac{55}{6}}\cdot\frac{25}{46}+\frac{3}{11}=\frac{23}{55}\cdot\frac{25}{46}+\frac{3}{11}=$

$=\frac{5}{22}+\frac{3}{11}=\frac{11}{22}=\frac{1}{2}$.

1.4. DECIMALNI BROJEVI

Ako bismo proveli razlomkom naznačeno dijeljenje, dobili bismo prikaz istog racionalnog broja u decimalnom zapisu.

Tako je:

$$-\frac{1}{2}=-1:2=0.5,\ \frac{3}{4}=3:4=0.75 \text{ i } \frac{9}{8}=9:8=1.125.$$

Navedeni primjeri su konačni decimalni brojevi. No, znamo i drugačije primjere:

$$\frac{1}{3}=1:3=0.333333333333\ldots,$$

$$-\frac{10}{11}=-10:11=-0.909090909090\ldots,$$

$$\frac{3}{7}=3:7=0.428571428571428571\ldots.$$

Decimalni prikaz racionalnog broja detaljnije ćemo proučiti u poglavlju *Realni brojevi*.

Decimalni je broj decimalnom točkom razdvojen na dva dijela: lijevo od decimalne točke je **cijeli dio** koji čine dekadska mjesta, a desno od decimalne točke **decimalni dio** koji čine decimalna mjesta. Mjesta desno od decimalne točke redom su: desetinke, stotinke, tisućinke, desettisućinke, itd.

1.4.1. ZAOKRUŽIVANJE DECIMALNIH BROJEVA

Zbog praktičnih razloga često se pojavljuje potreba da se brojevi umjesto točnim izraze približnim vrijednostima. To nas dovodi do **zaokruživanja brojeva**. Katkad je potrebno zaokružiti i prirodne brojeve.

Kod zaokruživanja brojeva postupamo na sljedeći način: ako se iza znamenke na koju zaokružujemo nalazi znamenka 5, 6, 7, 8 ili 9, zaokružujemo naviše (znamenku na koju zaokružujemo povećamo za 1), a ako se iza znamenke na koju zaokružujemo nalazi znamenka 0, 1, 2, 3 ili 4, zaokružujemo naniže (znamenku na koju zaokružujemo ne mijenjamo).

zaokruživa-nje brojeva

Primjer 1. Broj 63.87265 zaokruži na:

a) najbližu desettisućinku: 63.8727,
b) najbližu tisućinku: 63.873,
c) najbližu stotinku: 63.87,
d) najbližu desetinku: 63.9,
e) najbliže cijelo: 64.

1.4.2. RAČUNSKE OPERACIJE S DECIMALNIM BROJEVIMA

Decimalne brojeve zbrajamo (oduzimamo) slično kao i cijele brojeve: odgovarajuća dekadska mjesta s odgovarajućim dekadskim mjestima, a odgovarajuća decimalna mjesta s odgovarajućim decimalnim mjestima. Posebno trebamo pripaziti na potpisivanje: decimalnu točku potpisujemo ispod decimalne točke, a zatim i odgovarajuće znamenke.

računske operacije s cijelim brojevima

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $6.24+0.971=7.211$,
b) $7.33-2.567=4.763$,
c) $14.92-17.16+4.8-6.012=19.72-23.172=-3.452$.

Decimalne brojeve množimo kao i cijele, a broj decimalnih mjesta rezultata jednak je zbroju decimalnih mjesta svih faktora.

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $-8.24\cdot 2.547=-20.98728$,
b) $-1.2\cdot 3.23\cdot(-5.129)=19.880004$.

Decimalni broj cijelim brojem dijelimo kao i cijele brojeve. Kada u postupku dijeljenja „spuštamo“ znamenku iza decimalne točke, decimalnu točku dopisujemo u rezultat.

Decimalni broj dijelimo decimalnim tako da najprije broj kojim dijelimo (djelitelj) proširimo dekadskom jedinicom do cijelog broja. Istom dekadskom jedinicom zatim proširimo i broj koji dijelimo (djeljenik) te nastavimo dijeliti.

Primjer 3. Izračunajmo:

a) $57.4 : 7 = 8.2,$
$\quad 14$
$\quad\ 0$

b) $4.032 : 1.8 = 40.32 : 18 = 2.24.$
$\quad 43$
$\quad\ 72$
$\quad\quad 0$

Pogledajmo i ovdje nekoliko zadataka u kojima uvježbavamo pravilno izvođenje računskih operacija, njihov pravilan redoslijed te pravilan rad sa zagradama.

Primjer 4. Izračunajmo:

a) $13.44 : 6 + 0.35 - 13.78 : 5.3 = 2.24 + 0.35 - 2.6 = 2.59 - 2.6 = -0.01,$

b) $-3.61 - 4.3 \cdot (26.2 - 18.9) = -3.61 - 4.3 \cdot 7.3 = -3.61 - 31.39 = -35.$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Izračunajte:
   a) $(-31+14)\cdot(2-8) =$
   b) $(-31+14)\cdot 2 - 8 =$
   c) $-31 + 14\cdot(2-8) =$
   d) $-31 + 14\cdot 2 - 8 =$

2. Oslobodite se zagrada pa izračunajte:
   a) $-[-(31+12)-(2-31)]-\{-15-[-7+(-3-15+7)]\}=$
   b) $-\{47-[11-7+(47-16)+5]\}-[5-1-(-13-11+16)]=$

3. Izračunajte:
   a) $-3-45:\{-14-2:[12-2\cdot(-3-2)+40:(-2)]\}=$
   b) $14-\{44:(-11)-100:[13-2\cdot(-4-2)]\}=$

4. a) Odredite $NZD(420,168)$ i $nzv(420,168)$.

b) Razlomak $\frac{420}{168}$ skratite do neskrativog razlomka.

c) Razlomak $\frac{11}{12}$ zapišite kao razlomak s nazivnikom 396.

5. Izračunajte:

a) $1-\frac{14}{5}:\frac{21}{25}=$

b) $-\frac{7}{3}\cdot 3-2\cdot\frac{1}{2}=$

c) $-\frac{5}{2}-\frac{1}{16}\cdot\left[\left(1-\frac{14}{5}:\frac{21}{25}\right)\cdot 3-2\cdot\frac{1}{2}\right]=$

6. Izračunajte:

a) $-\frac{-13}{25}-\left(-\frac{6}{25}\right)-\frac{-4}{-25}=$

b) $\frac{5}{6}-\left(2\frac{1}{3}+\frac{5}{2}\right):\left(4\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}\right)=$

c) $13\frac{1}{2}:\frac{9}{4}-1\frac{7}{8}\cdot\left(7-\frac{5}{3}\right)=$

d) $-\frac{7}{10}-\frac{4}{5}\cdot\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right):\frac{5}{3}\right]=$

e) $\left[\frac{9}{4}-\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{5}{6}\right)\right]:\left[\frac{1}{5}\cdot\left(3+\frac{1}{3}\right)+\frac{13}{36}\right]:\left(-\frac{2}{3}+1\right)=$

f) $\dfrac{\frac{11}{15}\cdot\left(3-\frac{7}{4}\right)}{\frac{5}{4}-1:\frac{3}{2}}-\frac{1}{7}:\frac{1}{2}=$

g) $\dfrac{36\frac{2}{3}:15+8\frac{2}{3}\cdot 7}{12\frac{1}{3}+8\frac{6}{7}:2\frac{4}{7}}=$

7. Izračunajte:

a) $16.94-18.26+5.9-7.015=$

b) $(5.6-3.9)\cdot 2.8=$

c) $131.22:5.4-30.22=$

d) $(56.7:7+4.86:6)\cdot(-6.2)=$

e) $32.42-2.2\cdot(40-25.5)-7.14:1.7=$

2. POTENCIJE S CJELOBROJNIM EKSPONENTOM

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Zašto uvodimo potencije? Kako računamo s potencijama?*
2. *Zašto uvodimo mjerenje? Koje su mjerne jedinice za duljinu i kako ih preračunavamo?*

2.1. POTENCIJE S CJELOBROJNIM EKSPONENTOM

Broj

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

naziva se ***n*-ta potencija broja *a***. Broj a je **baza (osnova) potencije**, a broj n **eksponent**. Pridruživanje koje broju a pridružuje a^n naziva se **potenciranje**. Za neke eksponente n potenciranje ima posebno ime: za $n = 2$ to je **kvadriranje**, a za $n = 3$ **kubiranje**.

potencija

baza potencije

eksponent

potenciranje

Po dogovoru je $a^1 = a$.

Uočimo da su potencije važne radi kraćih zapisivanja nekih matematičkih izraza.

Primjer 1. Sljedeće umnoške zapišimo u obliku potencija:

a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$,

b) $0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 = 0.7^6$,

c) $-5 \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^5$,

d) $x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$,

e) $(a-b) \cdot (a-b) \cdot (a-b) = (a-b)^3$.

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$,

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$,

c) $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$,

d) $(-1)^{202} = 1$,

e) $(-1)^{3003} = -1$.

Dakle, ako su, kao ranije, parni brojevi brojevi oblika $2n$, a neparni brojevi oblika $2n-1$, gdje je $n \in \mathbf{N}$, onda vrijedi:

$$(-1)^{2n} = 1$$
$$(-1)^{2n-1} = -1 .$$

parni i neparni eksponenti

Primjer 3. Izračunajmo:

a) $3\cdot 2^4 - 4\cdot 3^3 + 5\cdot 4^2 = 3\cdot 16 - 4\cdot 27 + 5\cdot 16 = 48 - 108 + 80 = 20$,
b) $(-1)^{2007} - (-1)^{2008} - (-1)^{2009} = -1 - 1 - (-1) = -1 - 1 + 1 = -1$.

2.2. ZBRAJANJE I ODUZIMANJE POTENCIJA

Zbrajati i oduzimati možemo samo one potencije koje imaju i jednake baze i jednake eksponente.

zbrajanje i oduzimanje potencija

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $4x^2 - 5x^2 + 7x^2 = 6x^2$,
b) $a^3 + a^3 + a^3 + a^3 = 4a^3$,
c) $-7\cdot 2^8 - 10\cdot 2^8 + 18\cdot 2^8 = 2^8$,
d) $2x^{11} - 5x^9 + x^{11} - 2.5x^9 - 4x^{11} + 9.5x^9 = -x^{11} + 2x^9$.

Važnija od kratkoće zapisivanja jesu svojstva potencija koja omogućavaju lakše računanje s brojevima i matematičkim izrazima. Upoznajmo ih:

2.3. MNOŽENJE POTENCIJA JEDNAKIH BAZA

Izračunajmo: $a^4 \cdot a^3$. Prema značenju potencija možemo pisati:
$$a^4 \cdot a^3 = (a\cdot a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a) = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^7 .$$
Uočavamo:
$$a^4 \cdot a^3 ,$$

i zaključujemo da općenito vrijedi:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} .$$

Potencije jednakih baza množimo tako da baze prepišemo, a eksponente zbrojimo.

množenje potencija jednakih baza

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $x^5 \cdot x^{11} = x^{5+11} = x^{16}$,
b) $10^3 \cdot 10^5 \cdot 10^7 = 10^{3+5+7} = 10^{15}$,

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^8 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^7 = \left(\frac{a}{b}\right)^{8+7} = \left(\frac{a}{b}\right)^{15}$,

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{5+3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$.

2.4. DIJELJENJE POTENCIJA JEDNAKIH BAZA

Postupimo slično kao kod množenja potencija jednakih baza i izračunajmo:

$$a^5 : a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a \cdot a \cdot a = a^3.$$

Zaključujemo:

$$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3,$$

i općenito:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

dijeljenje potencija jednakih baza

Potencije jednakih baza dijelimo tako da baze prepišemo, a eksponente oduzmemo.

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $x^{11} : x^2 = x^{11-2} = x^9$,
b) $2^9 : 2^6 = 2^{9-6} = 2^3 = 8$,
c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{20} : \left(-\frac{1}{3}\right)^{17} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{20-17} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$.

Odredimo sada količnik $a^2 : a^5$ koristeći se pokazanim pravilom:

$$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}.$$

Također je

$$a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3}.$$

Uočavamo da je:

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}.$$

Pri dijeljenju potencija javlja se praktična potreba za uvođenjem potencije čiji je eksponent negativan broj. Za $a \neq 0$ vrijedi općenito:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

potencije s negativnim eksponentom

Za potenciju razlomka s negativnim eksponentom općenito vrijedi:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$,

b) $(-3)^{-2}=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9}$,

c) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-3}=\left(-\frac{2}{5}\right)^{3}=-\frac{8}{125}$,

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=2^5=32$.

Primjer 3. Izračunajmo:

a) $x^{-6}:x^5=x^{-6-5}=x^{-11}=\frac{1}{x^{11}}$,

b) $3^2:3^{-3}=3^{2-(-3)}=3^5=243$,

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}:\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2-(-1)}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}=-2$.

Pogledajmo što nam daje pravilo za dijeljenje potencija jednakih baza kada su i eksponenti jednaki:

$$a^n:a^n=a^{n-n}=a^0.$$

Znamo da je

$$a^n:a^n=1,$$

pa za svaku bazu $a\neq 0$ vrijedi:

$$a^0=1.$$

Primjer 4. Izračunajmo:

a) $2^0=1$,

b) $(-123)^0=1$,

c) $\left(-\frac{8}{9}\right)^0=1$,

d) $(abc)^0=1$.

Ovime smo pojasnili naziv poglavlja *Potencije s cjelobrojnim eksponentom* jer smo uveli pojam potencije za svaki cjelobrojan eksponent, odnosno za pozitivne brojeve, negativne brojeve i nulu.

Primijenimo naučena pravila u sljedećem primjeru:

Primjer 5. Izračunajmo:

a) $\left(\frac{6}{7}\right)^0 - 8\cdot\left(9-8^0\right)\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)^2 + 64\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = 1-8\cdot 8\cdot\frac{25}{64} + 64\cdot\left(-\frac{1}{64}\right) =$
$= 1-25-1 = -25$,

b) $\dfrac{8\cdot 2^{-3}+9\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}}{13^0+\left(\frac{1}{3}\right)^0-\left(\frac{1}{12}\right)^{-1}} = \dfrac{8\cdot\frac{1}{8}+9\cdot\frac{49}{9}}{1+1-12} = \dfrac{1+49}{-10} = \dfrac{50}{-10} = -5$.

c) $\dfrac{7^{13}x^{10}y^7}{7^{11}x^{-6}y^9} = 7^{13-11}x^{10-(-6)}y^{7-9} = 7^2x^{16}y^{-2} = \dfrac{49x^{16}}{y^2}$.

2.5. POTENCIRANJE POTENCIJA

Odredimo sada čemu je jednako $\left(a^5\right)^3$. Taj izraz možemo shvatiti kao potenciju s bazom a^5 i eksponentom 3, pa vrijedi:

$$\left(a^5\right)^3 = a^5\cdot a^5\cdot a^5 = a^{5+5+5} = a^{5\cdot 3} = a^{15}.$$

Općenito vrijedi:

$$\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}.$$

Potencije potenciramo tako da bazu prepišemo, a eksponente pomnožimo.

potenciranje potencija

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\left(5^4\right)^5 = 5^{4\cdot 5} = 5^{20}$,

b) $\left(a^{-4}\right)^3 = a^{-4\cdot 3} = a^{-12}$,

c) $\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{-3}\right)^{-7} = \left(\frac{1}{x}\right)^{21} = \frac{1}{x^{21}}$.

U sljedećem primjeru primijenit ćemo sva spomenuta pravila:

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $\left(2a^{-7}b^4c^2\right)^5\cdot\left(3a^{12}b^{-10}c^{-4}\right)^2 = 32a^{-35}b^{20}c^{10}\cdot 9a^{24}b^{-20}c^{-8} = 288a^{-11}b^0c^2 =$
$= \dfrac{288c^2}{a^{11}}$,

b) $x^{-10}:\left[\left(x^{7}\right)^{-4}\cdot\left(x^{-3}\right)^{-5}\right]=x^{-10}:\left[x^{-28}\cdot x^{15}\right]=x^{-10}:x^{-13}=x^{3}$,

c) $\left(\dfrac{a^{-7}b^{2}}{a^{4}c^{6}}\right)^{-5}\cdot\left(\dfrac{a^{-11}b^{3}}{a^{5}c^{-7}}\right)^{4}=\dfrac{a^{35}b^{-10}}{a^{-20}c^{-30}}\cdot\dfrac{a^{-44}b^{12}}{a^{20}c^{-28}}=\dfrac{a^{-9}b^{2}}{a^{0}c^{-58}}=\dfrac{b^{2}c^{58}}{a^{9}}$,

d) $\dfrac{125^{4}\cdot 25^{-3}}{5^{13}\cdot 0.2^{4}}=\dfrac{\left(5^{3}\right)^{4}\cdot\left(5^{2}\right)^{-3}}{5^{13}\cdot\left(5^{-1}\right)^{4}}=\dfrac{5^{12}\cdot 5^{-6}}{5^{13}\cdot 5^{-4}}=\dfrac{5^{6}}{5^{9}}=5^{-3}=\dfrac{1}{125}$.

2.6. MJERENJE

2.6.1. MJERENJE I MJERNI BROJ

Osim brojenja predmeta ili članova nekog skupa, svakodnevna praksa zahtijeva da se predmeti međusobno uspoređuju, npr. po duljini, težini, itd. Uspoređivanjem dvaju predmeta možemo zaključiti koji je veći i jesu li možda jednaki. Ovakvo uspoređivanje često je nedovoljno. Ponekad treba odrediti, npr. za koliko je neki predmet veći ili manji od drugoga.

Određivanje pojedinih veličina provodi se **mjerenjem**. Da bismo mogli mjeriti neku veličinu, moramo odrediti **jedinicu mjere** za tu vrstu veličine. Mjeriti neku veličinu znači tražiti koliko se puta jedinica mjere nalazi u toj veličini. Broj koji nam kaže koliko se puta se puta jedinica mjere nalazi u veličini koju mjerimo naziva se **mjerni broj**.

mjerenje

jedinica mjere

mjerni broj

Nekad su se za istu vrstu veličina koristile različite jedinice mjere. Danas se koristi međunarodni sustav mjernih jedinica kojim je određeno sedam osnovnih jedinica mjere, te neke izvedene jedinice mjera.

Za praktične potrebe, osim osnovnih i izvedenih jedinica, koriste se više i niže jedinice. Nazivi viših i nižih jedinica se dobiju tako da se ispred naziva temeljnih jedinica stave odgovarajući predmeci koji predstavljaju potenciju baze 10 s cjelobrojnim eksponentom:

POTENCIJE BAZE 10	PREDMETAK	OZNAKA
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	tera	T
$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$	giga	G
$1\,000\,000 = 10^{6}$	mega	M
$1\,000 = 10^{3}$	kilo	k
$100 = 10^{2}$	hekto	h
$10 = 10^{1}$	deka	da
$1 = 10^{0}$	jedinica mjere	
$0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$	deci	d
$0.01 = \frac{1}{10^{2}} = 10^{-2}$	centi	c
$0.001 = \frac{1}{10^{3}} = 10^{-3}$	mili	m
$0.000001 = \frac{1}{10^{6}} = 10^{-6}$	mikro	μ
$0.000000001 = \frac{1}{10^{9}} = 10^{-9}$	nano	n
$0.000000000001 = \frac{1}{10^{12}} = 10^{-12}$	piko	p

predmeci mjernih jedinica

2.6.2. JEDINICE MJERA ZA DULJINU

Osnovna mjerna jedinica za mjerenje duljine je **1 metar**. Navedimo nazive većih i manjih jedinica mjera za duljinu koje se u praksi najčešće koriste:

metar

JEDINICA	OZNAKA	IZNOS U METRIMA
kilometar	km	1 000 metara
hektometar	hm	100 metara
dekametar	dam	10 metara
metar	m	osnovna jedinica
decimetar	dm	0.1 metra
centimetar	cm	0.01 metra
milimetar	mm	0.001 metra
mikrometar	μm	0.000001 metra
nanometar	nm	0.000000001 metra

najčešće mjerne jedinice za duljinu

Primjer 1. Izrazimo u metrima:

a) 3 007 mm = 3 007 : 1 000 m = 3.007 m,
b) 8 km = 8 · 1 000 m = 8 000 m,
c) 6 μm = 6 : 1 000 000 m = 0.000007 m,
d) 24 m 1 dm 8 mm = 24 m + 0.1 m + 0.008 m = 24.108 m,
e) 2 km 23 cm = 2000 m + 0.23 m = 2000.23 m.

Primjer 2. Izrazimo u decimetrima:

a) 6 cm = 6 : 10 dm = 0.6 dm,
b) 2873 mm = 2873 : 100 dm = 28.73 dm,
c) 24 km 74 cm = 240 000 dm + 7.4 dm = 240 007.4 dm.

Primjer 3. Izrazimo u centimetrima:

a) 256 mm = 256 : 10 cm = 25.6 cm,
b) 45 dm = 45 · 10 cm = 450 cm,
c) 43 m 5 mm = 4 300 cm + 0.5 cm = 4 300.5 cm.

Primjer 4. Izrazimo u kilometrima:

a) 5 264 cm = 5 264 : 100 000 km = 0.05264 km,
b) 3 546 m = 3 546 : 1000 km = 3.546 km,
c) 350 m 24 dm = 0.35 km + 0.0024 km = 0.3524 km.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Izračunajte:

a) $(-1)^{101}-(-1)^{102}-(-1)^{103}=$

b) $-4\cdot(-1)^{77}-3\cdot(-1)^{78}-2\cdot(-1)^{79}=$

c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{0}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}=$

d) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{2}+\left(-\frac{2}{5}\right)^{3}\right]\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-3}=$

e) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}\cdot10^{-1}-\left(7+11^{-7}\right)^{0}=$

f) $\dfrac{\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4}+2\cdot(-3)^{0}}{3-(-2)^{-3}}=$

g) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}+2^{-2}}=$

h) $\left(2+\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)^{-2}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]=$

2. Pojednostavite izraze i rezultat zapišite bez negativnih eksponenata:
   a) $2.3x^5-4x^4+1.7x^5-2.8x^4-2.5x^5+6.3x^4=$
   b) $\dfrac{3^9x^{15}y^2}{3^{12}x^{-3}y^5}=$
   c) $\left(2a^{-9}b^6c^3\right)^5\cdot\left(3a^{17}b^{-15}c^{-7}\right)^2=$
   d) $a^{-6}:\left[\left(a^4\right)^{-1}\cdot\left(a^{-2}\right)^{-3}\right]=$
   e) $\left(\dfrac{a^5b^6}{x^6y^4}\right)^3:\left(\dfrac{x^9y^6}{a^7b^9}\right)^{-2}=$
   f) $\dfrac{2^{-9}\cdot0.5^8\cdot16^7}{0.25^{10}\cdot4^9}=$
   g) $\dfrac{5^{-10}\cdot0.2^9\cdot125^8}{0.04^{11}\cdot25^{10}}=$

3. ALGEBARSKI IZRAZI

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Što su algebarski izrazi i kako računamo s njima? Kako algebarski izraz zapisujemo u obliku produkta?*
2. *Što su algebarski razlomci?*

3.1. ALGEBARSKI IZRAZI

Izrazi oblika a^3b, x^5y-2xy, $2x^2-5x^4y^4+y^2$ itd. nazivaju se **algebarski izrazi**. Pribrojnici u algebarskim izrazima nazivaju se **monomi** ili **jednočlani izrazi**, npr: a^3b, x^5y, $-2xy$, $2x^2$, $-5x^4y^4$, y^2.
Zbrajanjem monoma dobivamo **binom** ili **dvočlani izraz**, npr. x^5y-2xy.
Trinom ili **tročlani izraz** dobivamo kao zbroj triju monoma, npr. $2x^2-5x^4y^4+y^2$, a **polinom** ili **višečlani izraz** kao zbroj više monoma.

Simboli a, x i y u izrazima nazivaju se **opći brojevi**.

algebarski izraz

monom

binom

trinom

polinom

opći brojevi

3.2. MNOŽENJE BINOMA

Primjer 1. Pomnožimo:

$(5b+4)\cdot 2a = \{primijenimo\ svojstvo\ distributivnost\ množenja\ prema\ zbrajanju\} =$
$= 5b\cdot 2a + 4\cdot 2a = \{primijenimo\ svojstva\ komutativnosti\ i\ asocijativnosti\} =$
$= 10ab + 8a$.

Primjer 2. Pomnožimo:

$(3a+2x)\cdot(2x-3y) = \{prema\ prethodnom\ primjeru\} =$
$= 3a\cdot(2x-3y) + 2x\cdot(2x-3y) = 6ax - 9ay + 4x^2 - 6xy$.

Ovaj nas primjer dovodi do pravila množenje svakog člana zagrade sa svakim, tj.

$$(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd\ .$$

množenje binoma

Primjer 3. Pomnožimo:

$(3x-4y)\cdot(x-3y+6) = \{svaki\ član\ druge\ zagrade\ množimo\ s\ 3x,\ a\ zatim\ s\ -4y\} =$
$= 3x^2 - 9xy + 18x - 4xy + 12y^2 - 24y = \{zbrojimo\ što\ je\ dozvoljeno\ zbrajati\} =$
$= 3x^2 + 18x - 13xy - 24y + 12y^2$.

3.3. KVADRAT BINOMA

Najjednostavniji su binomi oblika $a+b$ i $a-b$. Radi što lakšeg računanja pogledat ćemo što dobivamo njihovim kvadriranjem.

Prema značenju kvadriranja i naučenom množenju binoma dobivamo:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2\ ,$$

Odnosno

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2\ .$$

Dobivenu formulu

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

nazivamo **kvadrat zbroja**, a formulu

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

kvadrat razlike.

kvadrat zbroja

kvadrat razlike

Izvedene formule pamtimo riječima: „kvadrat zbroja jednak je kvadratu prvog član zagrade uvećanom za dvostruki produkt prvog i drugog člana zagrade i kvadrat drugog član zagrade“.

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $(3+x)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot x + x^2 = 9 + 6x + x^2$,

b) $\left(-a+\frac{1}{2}\right)^2 = (-a)^2 + 2\cdot(-a)\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = a^2 - a + \frac{1}{4}$,

c) $(3a^2+4a^6)^2 = (3a^2)^2 + 2\cdot 3a^2\cdot 4a^6 + (4a^6)^2 = 9a^4 + 24a^8 + 16a^{12}$.

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $(x-2)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$,

b) $(-2a-3b)^2 = (-2a)^2 - 2\cdot(-2a)\cdot 3b + (3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$.

Uočimo:

$(-2a-3b)^2 = [-(2a+3b)]^2 = (2a+3b)^2 =$

$= (2a)^2 + 2\cdot 2a\cdot 3b + (3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

c) $\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)^2 = (x^4)^2 - 2\cdot x^4\cdot\frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = x^8 - 2x^2 + \frac{1}{x^4}$.

Primjer 3. Primjenom formule za kvadrat binoma izračunajmo:

$$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2\cdot 100\cdot 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801.$$

3.4. RAZLIKA KVADRATA

Pogledajmo sada čemu je jednak umnožak binoma $a+b$ i $a-b$:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Dobivena formulu zapisuje s i ovako:

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

i naziva **razlika kvadrata**.

razlika kvadrata

Primjer 1. Primjenom formula za razliku kvadrata izračunajmo:

a) $(x+3)\cdot(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$,

b) $\left(2a+\frac{1}{5}b\right)\cdot\left(2a-\frac{1}{5}b\right) = (2a)^2 - \left(\frac{1}{5}b\right)^2 = 4a^2 - \frac{1}{25}b^2$.

Primjer 2. Napišimo u obliku umnoška:

a) $x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x+6)\cdot(x-6)$,

b) $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{16}b^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{4}b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b\right)$,

c) $0.16x^4 - 0.25y^6 = \left(0.4x^2\right)^2 - \left(0.5y^3\right)^2 = \left(0.4x^2 + 0.5y^3\right) \cdot \left(0.4x^2 - 0.5y^3\right)$.

Formulu za razliku kvadrata možemo koristiti i za lakše rješavanje nekih brojčanih zadataka:

Primjer 3. Izračunajmo:

a) $53^2 - 47^2 = (53 + 47) \cdot (53 - 47) = 100 \cdot 6 = 600$,

b) $35.9^2 - 35.8^2 = (35.9 + 35.8) \cdot (35.9 - 35.8) = 71.7 \cdot 0.1 = 7.17$.

3.5. RASTAVLJANJE POLINOMA NA FAKTORE

Često je, radi pojednostavljenja, algebarski izraz potrebno **rastaviti na faktore**, tj. **napisati u obliku umnoška**. To činimo na jedan od sljedećih načina:

rastavljanje algebarskog izraza na faktore

1. primjenom formula (kvadrat binoma, razlika kvadrata),
2. metodom izlučivanja,
3. metodom grupiranja,
4. kombinacijom navedenih metoda.

Sjetimo se najprije formula iz prethodnih odjeljaka:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \ldots \quad \text{kvadrat zbroja,}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \ldots \quad \text{kvadrat razlike,}$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad \ldots \quad \text{razlika kvadrata.}$$

Navedene formule ovdje koristimo u drugom smjeru:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Primjer 1. Primjenom formula za kvadrat binoma napišimo u obliku produkta:

a) $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x+2)^2$,

b) $0.09a^2 - 3ab + 25b^2 = (0.3a)^2 - 2 \cdot 0.3a \cdot 5b + (5b)^2 = (0.3a - 5b)^2$,

c) $100 + 20x^2y^3 + x^4y^6 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot x^2y^3 + \left(x^2y^3\right)^2 = \left(10 + x^2y^3\right)^2$,

d) $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}a^3b^2 + \frac{1}{9}a^4b^4 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}a^2b^2 + \left(\frac{1}{3}a^2b^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}a^2b^2\right)^2$.

Ranije smo spomenuli i svojstvo distributivnost množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\ .$$

Primjenjujemo ga pri množenju kako bismo u nekim situacijama pojednostavnili složenije izraze („oslobađamo se zagrade“). Istim se pravilom koristimo pri množenju višečlanih algebarskih izraza.
Svojstvo distributivnosti možemo čitati i zdesna ulijevo:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Kažemo da smo dvočlani izraz zapisali u obliku umnoška ili da smo ga rastavili na faktore ili da smo **izlučili zajednički faktor**.

izlučivanje zajedničkog faktora

Primjer 2. Metodom izlučivanja zapišimo u obliku produkta:

a) $x^2 + xy = x \cdot x + x \cdot y = x \cdot (x + y)$,
b) $3m^3 + 6mn = 3m \cdot m^2 + 3m \cdot 2n = 3m \cdot (m^2 + 2n)$,
c) $21a^8b^3 + 14a^7b^7 = 7a^7b^3 \cdot 3a + 7a^7b^3 \cdot 2b = 7a^7b^3(3a + 2b)$,
d) $. a \cdot (b + 1) - b \cdot (b + 1) = (b + 1) \cdot (a - b)$.

U pribrojnicima valja uočiti njihov najveći zajednički djelitelj, tj. najveći broj koji je faktor i jednog i drugog te ga izlučiti ispred zagrade.

Ako se algebarski izraz sastoji od četiri i više monoma, rastavljanje na faktore može se postići nekim zgodnim **grupiranjem** nakon kojega slijedi metoda izlučivanja zajedničkog faktora.

metoda grupiranja

Primjer 3. Metodom grupiranja zapiši u obliku produkta:

a) $2ab + 10a + 3b + 15 = (2ab + 10a) + (3b + 15) = 2a \cdot (b + 5) + 3 \cdot (b + 5) =$
$= (b + 5) \cdot (2a + 3)$
b) $3x^2 - 4x - 9xy^2 + 12y^2 = (3x^2 - 4x) - (9xy^2 - 12y^2) = x \cdot (3x - 4) - 3y^2 \cdot (3x - 4)$,
$= (3x - 4) \cdot (x - 3y^2)$.

Rastavljanje višečlanih algebarskih izraza na faktore općenito je vrlo složen problem. Ovdje ćemo se ograničiti na one nama primjerene i poslužiti se kombinacijom spomenutih metoda: primjenom naučenih formula, izlučivanjem zajedničkog faktora i grupiranjem članova:

Primjer 4. Rastavimo na faktore:

a) $48a^3b - 27ab^3 = 3ab \cdot (16a^2 - 9b^2) = 3ab \cdot (4a + 3b)(4a - 3b)$,
b) $2x^5y^2 - 24x^4y^3 + 72x^3y^4 = 2x^3y^2 \cdot (x^2 - 12xy + 36y^2) = 2x^3y^2 \cdot (x - 6y)^2$,
c) $a^3 - 10a^2 - 4a + 40 = (a^3 - 10a^2) - (4a - 40) = a^2 \cdot (a - 10) - 4 \cdot (a - 10) =$
$= (a - 10) \cdot (a^2 - 4) = (a - 10)(a + 2)(a - 2)$.

3.6. ALGEBARSKI RAZLOMCI

Razlomak kojemu je u brojniku i nazivniku algebarski izraz nazivamo **algebarskim razlomkom**. Dakle, algebarski razlomci su razlomci oblika:

$$\frac{b}{4a^2+ab},\ \frac{5a-3}{3a-6},\ \frac{a^2+6a+9}{a^2-9},\ \frac{3a^7b^2-9a^5b^3}{6a^5b-18a^3b^2}\ \ldots$$

Za njih vrijede ista pravila kao i za brojevne razlomke, tj. razlomke kojima su brojnik i nazivnik cijeli brojevi.

algebarski razlomci

3.6.1. SKRAĆIVANJE ALGEBARSKIH RAZLOMAKA

Algebarske razlomke skraćujemo kao i brojevne razlomke. Ako su brojnik i nazivnik djeljivi nekim algebarskim izrazom, onda se razlomak može skratiti tim izrazom. Do zajedničkog djelitelja dolazimo rastavljanjem brojnika i nazivnika na faktore, tj. zapisivanjem brojnika i nazivnika u obliku produkta.

Zapamtimo: Algebarske razlomke kratimo tek nakon što smo brojnik i nazivnik zapisali u obliku produkta. Kod zapisivanja u obliku produkta poslužit ćemo se jednom od naučenih metoda u prethodnom odjeljku.

skraćivanje algebarskih razlomaka

Primjer 1. Skratimo razlomak:

a) $\frac{2a^2b^3}{4ab^2}=\frac{2\cdot a\cdot b\cdot b^2}{2\cdot 2\cdot a\cdot b^2}=\{\text{uočimo zajednički faktor } 2ab^2\}=\frac{ab}{2}$,

b) $\frac{125b^7c^9}{25b^{11}c^2}=\frac{5\cdot 25\cdot b^7\cdot c^2\cdot c^7}{25\cdot b^4\cdot b^7\cdot c^2}=\{\text{uočimo zajednički faktor } 25b^7c^2\}=\frac{5c^7}{b^4}$,

c) $\frac{a^2-6a+9}{a^2-9}=\{\text{primijenimo formulu za kvadrat razlike u brojniku, a razliku kvadrata u nazivniku}\}=\frac{(a-3)^2}{(a-3)(a+3)}=\{\text{uočimo zajednički faktor } a-3\}=$
$\frac{a-3}{a+3}$,

d) $\frac{x^2-xy}{xy-y^2}=\{\text{brojnik i nazivnik zapišimo u obliku produkta metodom izlučivanja}\}$
$=\frac{x\cdot(x-y)}{y\cdot(x-y))}=\{\text{uočimo zajednički faktor } x-y\}=\frac{x}{y}$,

e) $\frac{a^3b-ab^3}{a^3b+2a^2b^2+ab^3}=\{\text{metoda izlučivanja}\}=\frac{ab\cdot(a^2-b^2)}{ab\cdot(a^2+2ab+b^2)}=\{\text{primjena formula}\}=\frac{ab\cdot(a-b)(a+b)}{ab(a+b)^2}=\{\text{uočimo zajednički faktor } ab(a+b)\}=\frac{a-b}{a+b}$,

f) $\frac{a^3+a^2+a+1}{a^3+a}=$ {*metoda grupiranja u brojniku, metoda izlučivanja zajedničkog faktora u nazivniku*} $=$

$=\frac{\left(a^3+a^2\right)+(a+1)}{a\cdot\left(a^2+1\right)}=\frac{a^2\cdot(a+1)+(a+1)}{a\cdot\left(a^2+1\right)}=\frac{(a+1)\left(a^2+1\right)}{a\cdot\left(a^2+1\right)}=$ {*uočimo zajednički faktor* a^2+1} $=\frac{a+1}{a}$.

3.6.2. ZBRAJANJE I ODUZIMANJE ALGEBARSKIH RAZLOMAKA

Za računanje s algebarskim razlomcima vrijede ista pravila kao i za računanje s brojevnim razlomcima. Algebarske razlomke jednakih nazivnika zbrajamo (oduzimamo) tako da nazivnik prepišemo, a brojnike zbrojimo (oduzmemo). Zajednički je nazivnik izraz koji sadrži faktore svih pojedinih nazivnika razlomaka koje zbrajamo (oduzimamo).

zbrajanje i oduzimanje algebarskih razlomaka

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\frac{5a-3}{3a-5}+\frac{a+4}{3a-5}$

Razlomci koje zbrajamo imaju jednake nazivnike. To je ujedno zajednički nazivnik:

$$\frac{5a-3}{3a-5}+\frac{a+4}{3a-5}=\frac{5a-3+a+4}{3a-5}=\frac{6a+1}{3a-5}.$$

b) $\frac{4a+3}{2}-\frac{a-9}{4}-\frac{6a-2}{8}$

Razlomci koje oduzimamo nemaju jednake nazivnike. Zajednički nazivnik, odnosno najmanji zajednički višekratnik brojeva 2, 4 i 8 je broj 8:

$$\frac{4a+3}{2}-\frac{a-9}{4}-\frac{6a-2}{8}=\frac{4\cdot(4a+3)-2\cdot(a-9)-(6a-2)}{8}=$$

$$=\frac{16a+12-2a+18-6a+2}{8}=\frac{8a+32}{8}=\frac{8\cdot(a+4)}{8}=a+4.$$

c) $\frac{5a-3}{3a-6}+\frac{a+4}{4a-8}$

Razlomci koje zbrajamo nemaju jednake nazivnike. Nazivnik prvog razlomka je $3a-6=3(a-2)$, a nazivnik drugog razlomka $4a-8=4(a-2)$. Za zajednički nazivnik uzimamo izraz $12(a-2)$, tj:

$$\frac{5a-3}{3a-6}+\frac{a+4}{4a-8}=\frac{5a-3}{3(a-2)}+\frac{a+4}{4(a-2)}=\frac{4(5a-3)+3(a+4)}{12(a-2)}=$$

$$=\frac{20a-12+3a+12}{12(a-2)}=\frac{23a}{12(a-2)}.$$

d) $\frac{b}{4a^2+ab}-\frac{16a}{4ab+b^2}$

Razlomci koje oduzimamo nemaju jednake nazivnike. Nazivnik prvog razlomka je $4a^2+ab=a(4a+b)$, a nazivnik drugog razlomka $4ab+b^2=b(4a+b)$. Za zajednički nazivnik uzimamo izraz $ab(4a+b)$, tj:

$$\frac{b}{4a^2+ab}-\frac{16a}{4ab+b^2}=\frac{b}{a(4a+b)}-\frac{16a}{b(4a+b)}=\frac{b^2-16a^2}{ab(4a+b)}=$$
$$=\frac{(b-4a)(b+4a)}{ab(b+4a)}=\frac{b-4a}{ab}.$$

e) $\dfrac{a-36}{6a-36}+\dfrac{4a+6}{a^2-6a}$

Razlomci koje zbrajamo nemaju jednake nazivnike. Nazivnik prvog razlomka je $6a-36=6(a-6)$, a nazivnik drugog razlomka $a^2-6a=a(a-6)$. Za zajednički nazivnik uzimamo izraz $6a(a-6)$, tj:

$$\frac{a-36}{6a-36}+\frac{4a+6}{a^2-6a}=\frac{a-36}{6(a-6)}+\frac{4a+6}{a(a-6)}=\frac{a(a-36)+6(4a+6)}{6a(a-6)}=$$
$$=\frac{a^2-36a+24a+36}{6a(a-6)}=\frac{a^2-12a+36}{6a(a-6)}=\frac{(a-6)^2}{6a(a-6)}=\frac{a-6}{6a}.$$

3.6.3. MNOŽENJE I DIJELJENJE ALGEBARSKIH RAZLOMAKA

I već ranije naučena pravila za množenje i dijeljenje brojevnih razlomaka prihvaćaju se za množenje i dijeljenje algebarskih razlomka. Da bi u postupku množenja proveli skraćivanje, važno je prethodno brojnik i nazivnik zapisati u obliku umnoška.

množenje i dijeljenja algebarskih razomaka

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\dfrac{3x^2y}{2a^3}\cdot\dfrac{4a^2}{2xy^2}=\dfrac{3x^2y\cdot 4a^2}{2a^3\cdot 2xy^2}=$ {*uočimo i skratimo zajednički faktor brojnika i nazivnika*} $=\dfrac{3x}{ay}$,

b) $\dfrac{15a-15b}{a^2+a}\cdot\dfrac{a^2-1}{3a^2-3b^2}=$ {*brojnike i nazivnike rastavimo na faktore i provedemo skraćivanje*} $=\dfrac{15(a-b)}{a(a+1)}\cdot\dfrac{(a+1)(a-1)}{3(a-b)(a+b)}=\dfrac{5(a-1)}{a(a+b)}$,

c) $\dfrac{6a+18}{2a-6}:\dfrac{a^2+6a+9}{a^2-9}=\dfrac{6a+18}{2a-6}\cdot\dfrac{a^2-9}{a^2+6a+9}=\dfrac{6(a+3)}{2(a-3)}\cdot\dfrac{(a-3)(a+3)}{(a+3)^2}=3$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Primjenom formula za kvadrat zbroja, kvadrat razlike i razliku kvadrata, izračunajte:
   a) $\left(-2a^3b^4-3a^5b^6\right)^2=$
   b) $\left(2x^7-\dfrac{4}{x^2}\right)^2=$
   c) $\left(\dfrac{1}{5}x^2+7y\right)\cdot\left(\dfrac{1}{5}x^2-7y\right)=$
2. Primjenom formula za kvadrat zbroja, kvadrat razlike i razliku kvadrata, zapišite u obliku produkta (rastavi na faktore):
   a) $\dfrac{25}{9}x^4-\dfrac{4}{49}y^2=$
   b) $16x^2y^2-40xy+25=$
   c) $4a^6+0.4a^3b^2+0.01b^4=$
   d) $8a^4b^4-12a^3b^5=$
   e) $7a^2-28b^2=$
   f) $3x^4y-18x^3y^2+27x^2y^3=$
   g) $9b^2\cdot(2-b)-4\cdot(2-b)=$
   h) $a^3-5a^2+4a-20=$

3. Skratite razlomke:

a) $\dfrac{4a^4+4a^3b}{8a^6-8a^4b^2}=$

b) $\dfrac{3a^4b^2-12a^2b^2}{4a^4b^3+8a^3b^3}=$

c) $\dfrac{16a^2-9b^2}{20ac+15bc}=$

d) $\dfrac{a^3-25a}{2a^2-10a}=$

e) $\dfrac{a^2-6a+9}{3a-9}=$

f) $\dfrac{a^2-2a}{a^3-4a^2+4a}=$

g) $\dfrac{15ab-25b^2}{9a^2-30ab+25b^2}=$

h) $\dfrac{4a^2-12a+9}{9a-4a^3}=$

4. Izračunajte:

a) $\dfrac{a^2-9a}{a^2-6a+9}\cdot\dfrac{a^2-9}{a-9}=$

b) $\dfrac{x^3-27}{x+2}\cdot\dfrac{2x+4}{x^2-6x+9}=$

c) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}:\dfrac{a+b}{a}=$

d) $\dfrac{5a+10}{5a-10}:\dfrac{a^2+4a+4}{a^2-4}=$

e) $\dfrac{2a+3b}{4}-\dfrac{6a-3b}{3}=$

f) $\dfrac{6x-1}{8x}-\dfrac{3-2x}{4x}+\dfrac{4-5x}{2x}=$

h) $\dfrac{2-a}{a^2+2a}-\dfrac{a}{a+2}=$

i) $\dfrac{12-y}{6y-36}-\dfrac{6}{y^2-6y}=$

j) $\dfrac{a-25}{5a-25}+\dfrac{3a+5}{a^2-5a}=$

k) $\dfrac{4b}{3a^2+2ab}-\dfrac{9b}{3ab+2b^2}=$

l) $\dfrac{a-1}{a^2-2a}-\dfrac{a}{a^2-4}=$

m) $\left(1-\dfrac{3x}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x^2-1}{1-4x^2}=$

g) $\frac{3a^2}{6a+4} - \frac{2}{9a+6} =$

n) $\frac{1-4a^2}{6} : \left(a - \frac{a+1}{3}\right) =$

4. DRUGI KORIJEN

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Kako definiramo drugi korijen, a kako korijene višeg reda?*
2. *Gdje koristimo korjenovanje? Koja su pravila računanja s korijenima?*

4.1. DRUGI KORIJEN

U ranijim odjeljcima upoznali smo postupak kvadriranja racionalnih brojeva. Ovdje ćemo razmatrati postupak obrnut kvadriranju koji se naziva korjenovanje.

Neka je $a \geq 0$. Drugi korijen iz a je broj $\sqrt{a}$ sa svojstvima:

1. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$,
2. $\sqrt{a} \geq 0$.

drugi korijen

Znak $\sqrt{\ }$ označuje **drugi korijen**, a vrijednost ispod znaka korijena naziva se **potkorijenska veličina**. Drugi korijen se još naziva i **kvadratni korijen**.

Svojstvo 1. govori da je korjenovanje obrnuto (inverzno) kvadriranju, a svojstvo 2. isključuje negativan broj kojemu je kvadrat broj a.

Tako je $2^2 = 4$ i $(-2)^2 = 4$. Zato brojevi 2 i -2 ispunjavaju svojstvo 1. Međutim, $\sqrt{4} = 2$ jer je prema svojstvu 2. $\sqrt{4} \geq 0$. Dakle $\sqrt{4} \neq -2$ iako je $(-2)^2 = 4$.

Slično je i:

$\sqrt{16} = 4$ jer je $4^2 = 16$,
$\sqrt{1.44} = 1.2$ jer je $1.2^2 = 1.44$,
$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$ jer je $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$.

4.2. RAČUNANJE S DRUGIM KORIJENOM

4.2.1. ZBRAJANJE I ODUZIMANJE DRUGIH KORIJENA

Zbrajamo i oduzimamo jedino korijene jednakih potkorijenskih veličina i to kao u primjeru:

zbrajanje i oduzimanje drugih korijena

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$,
b) $4\sqrt{a}-7\sqrt{a}-\sqrt{a}=-4\sqrt{a}$,
c) $5\sqrt{5}-17\sqrt{13}-\left(\sqrt{5}-4\sqrt{13}+4\sqrt{5}\right)=5\sqrt{5}-17\sqrt{13}-\sqrt{5}+4\sqrt{13}+4\sqrt{5}=$
$=-13\sqrt{13}$.

4.2.2. MNOŽENJE DRUGIH KORIJENA

Pogledajmo primjer:

$$\sqrt{25}\cdot\sqrt{16}=5\cdot 4=20,$$
$$\sqrt{25\cdot 16}=\sqrt{400}=20.$$

Vidimo da je $\sqrt{25}\cdot\sqrt{16}=\sqrt{25\cdot 16}$.

Može se pokazati da za $a\geq 0$ i $b\geq 0$ općenito vrijedi:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}.$$

množenje drugih korijena

Riječima, umnožak drugih korijena dvaju pozitivnih brojeva jednak je drugom korijenu njihova umnoška.

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3=6$, također je $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{36}=6$.
b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 18}=\sqrt{36}=6$, ovdje do rezultata dolazimo primjenom naučenog pravila, dok bi direktni račun zahtijevao rad na kalkulatoru, odnosno rad s približnim vrijednostima jer 2 i 18 nisu puni kvadrati pa bi i rezultat poprimio približnu vrijednost.
c) $\sqrt{0.3}\cdot\sqrt{2.7}=\sqrt{0.3\cdot 2.7}=\sqrt{0.81}=0.9$, računamo kao i b) dio zadatka,
d) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt{20}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5\cdot 20}\cdot\sqrt{27\cdot 3}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{81}=$
$=10\cdot 9=90$.

Jednakost $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ možemo bilježiti i koristiti i u drugom smjeru:

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $\sqrt{121\cdot 81}=\sqrt{121}\cdot\sqrt{81}=11\cdot 9=99$, budući da su 121 i 81 puni kvadrati, ovdje je jednostavnije najprije provesti korjenovanje pa tek onda množenje.
b) $\sqrt{0.36\cdot 144}=\sqrt{0.36}\cdot\sqrt{144}=0.6\cdot 12=7.2$, i ovdje računamo kao u b) dijelu zadatka.

Kad pod korijenom imamo broj koji se može rastaviti na umnožak dvaju brojeva od kojih se jedan može zapisati kao kvadrat, često postupamo kao u primjeru:

$$\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}\,.$$

Taj postupak nazivamo **djelomičnim korjenovanjem**.

djelomično korjenovanje

Primjer 3. Djelomično korjenujmo brojeve:

a) $\sqrt{75}=\sqrt{25\cdot 3}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}=5\sqrt{3}$,
b) $\sqrt{500}=\sqrt{100\cdot 5}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{5}=10\sqrt{5}$.

Primjer 4. Izračunajmo:

a) $3\sqrt{8}+\sqrt{98}=3\sqrt{4\cdot 2}+\sqrt{49\cdot 2}=3\cdot 2\sqrt{2}+7\sqrt{2}=6\sqrt{2}+7\sqrt{2}=13\sqrt{2}$,
b) $5\sqrt{40}-6\sqrt{90}+3\sqrt{10}=5\sqrt{4\cdot 10}-6\sqrt{9\cdot 10}+3\sqrt{10}=5\cdot 2\sqrt{10}-6\cdot 3\sqrt{10}+3\sqrt{10}=$
$=10\sqrt{10}-18\sqrt{10}+3\sqrt{10}=-5\sqrt{10}$.

4.2.3. DIJELJENJE DRUGIH KORIJENA

Za dijeljenje drugih korijena vrijedi slično svojstvo kao i za množenje. Imamo:

$$\sqrt{9:16}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}\ \text{jer je}\ \left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16},\ \text{odnosno}\ \sqrt{9}:\sqrt{16}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}.$$

Može se pokazati da za $a\ge 0$ i $b>0$ općenito vrijedi:

$$\sqrt{a}:\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{a:b}\,.$$

dijeljenje drugih korijena

Riječima, količnik drugih korijena dvaju pozitivnih brojeva jednak je drugom korijenu količnika tih brojeva.

Svojstvo možemo zapisati i u drugom smjeru:

$$\sqrt{a:b}=\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{a}:\sqrt{b}\,.$$

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{48}{3}}=\sqrt{16}=4$,

b) $\sqrt{\dfrac{11}{48}}:\sqrt{\dfrac{44}{75}}=\sqrt{\dfrac{11}{48}:\dfrac{44}{75}}=\sqrt{\dfrac{11}{48}\cdot\dfrac{75}{44}}=\sqrt{\dfrac{25}{16\cdot 4}}=\dfrac{5}{4\cdot 2}=\dfrac{5}{8}$.

Prisjetimo se formula za kvadrat binoma i razliku kvadrata u primjeru:

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2=9\cdot 2-12\sqrt{2\cdot 3}+4\cdot 3=$
$=30-12\sqrt{6}$,

b) $\sqrt{26^2-10^2}=\sqrt{(26+10)(26-10)}=\sqrt{36\cdot 16}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{16}=6\cdot 4=24$.

4.3. RACIONALIZACIJA NAZIVNIKA

Korijeni se često pojavljuju u nazivnicima razlomaka. Dijeljenje korijenom je neprikladno jer korijen obično zamjenjujemo približnim vrijednostima s određenim brojem decimala. Tako je i postupak dijeljenja složen, npr:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\approx\frac{1}{1.4142}\approx 0.7071.$$

Radi lakšeg računanja taj je razlomak potrebno preurediti tako da u nazivniku nema korijena. To se postiže množenjem brojnika i nazivnika prikladno odabranim brojem, npr:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx\frac{1.4142}{2}=0.7071.$$

Postupak uklanjanja korijena iz nazivnika nazivamo **racionalizacija**.

racionaliza-cija nazivnika

Primjer 1. Racionalizirajmo nazivnik:

a) $\dfrac{55}{\sqrt{11}}=\dfrac{55}{\sqrt{11}}\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}=\dfrac{55\sqrt{11}}{11}=5\sqrt{11}$,

b) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{5}{2\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2\cdot 5}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

U idućem primjeru pri racionalizaciji ćemo se poslužiti formulom za razliku kvadrata:

Primjer 2. Racionalizirajmo nazivnik:

a) $$\frac{1}{1+\sqrt{3}}=\frac{1}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}=\frac{1-\sqrt{3}}{1^2-\sqrt{3}^2}=\frac{1-\sqrt{3}}{1-3}=$$
$$=\frac{1-\sqrt{3}}{-2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

b) $$\frac{15}{\sqrt{17}-\sqrt{2}}=\frac{15}{\sqrt{17}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{17}+\sqrt{2}}{\sqrt{17}+\sqrt{2}}=\frac{15\left(\sqrt{17}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{17}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{17}+\sqrt{2}\right)}=\frac{15\left(\sqrt{17}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{17}^2-\sqrt{2}^2}=$$
$$=\frac{15\left(\sqrt{17}+\sqrt{2}\right)}{15}=\sqrt{17}+\sqrt{2}.$$

4.4. KORIJENI VIŠEG REDA

Slično kao drugi, definiramo četvrti korijen iz broja $a\geq 0$:

Neka je $a\geq 0$. Četvrti korijen iz a je broj $\sqrt[4]{a}$ sa svojstvima:

1. $\left(\sqrt[4]{a}\right)^4=a$,
2. $\sqrt[4]{a}\geq 0$.

četvrti korijen

Tako je $\sqrt[4]{16}=2$ jer je $2^4=16$ i $2>0$. Iako je $(-2)^4=16$, broj -2 nije četvrti korijen iz 16.

Na isti način definiramo ostale parne korijene. Sjetimo se da parne prirodne brojeve zapisujemo u obliku $2n$, $n\in\mathbf{N}$.

Neka je $a\geq 0$. $2n$-ti korijen iz a je broj $\sqrt[2n]{a}$ sa svojstvima:

1. $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n}=a$,
2. $\sqrt[2n]{a}\geq 0$.

parni korijeni

U nepranih korijena situacija je nešto jednostavnija. Tu se ne moramo ograničavati samo na pozitivne brojeve a i nulu. Tako je:

$$2^3=8,\text{ a } (-2)^3=-8,$$

dakle

$$\sqrt[3]{8}=2,\text{ a } \sqrt[3]{-8}=-2.$$

Općenito, neka je a bilo koji broj.

Treći korijen iz a je broj $\sqrt[3]{a}$ sa svojstvom $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a$.

treći korijen

Na isti način definiramo ostale neparne korijene. Sjetimo se da neparne prirodne brojeve zapisujemo u obliku $2n-1$, $n\in\mathbf{N}$.

Neka je a bilo koji broj. $2n-1$ korijen iz a je broj $\sqrt[2n-1]{a}$ sa svojstvom $\left(\sqrt[2n-1]{a}\right)^{2n-1}=a$.

neparni korijeni

Operacija koja broju a pridružuje broj $\sqrt[n]{a}$ naziva se **korjenovanje**. U izrazu $\sqrt[n]{a}$ broj a se zove **baza (osnova) korijena** ili **potkorijenska veličina**, a broj n **korijenski eksponent**.

korjenovanje

potkorijenska veličina

korijenski eksponent

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $-\sqrt[105]{-1}+\sqrt[106]{1}+\sqrt[107]{-1}=-(-1)+1+(-1)=1$,

b) $-\sqrt[3]{-8}-5\sqrt[3]{64}+2\sqrt[5]{32}=-(-2)-5\cdot4+2\cdot2=2-20+4=-14$.

Za operacije s korijenima višeg reda vrijede slična svojstva kao i za računanje s drugim korijenima:

1. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$,
2. $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\sqrt[n]{a:b}$,
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$.

svojstva korijena višeg reda

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $\sqrt[3]{-625}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{5}}=\sqrt[3]{-625\cdot\dfrac{1}{5}}=\sqrt[3]{-125}=-5$,

b) $\sqrt[4]{5}:\sqrt[4]{80}=\sqrt[4]{5:80}=\sqrt[4]{\dfrac{5}{80}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}=\dfrac{1}{2}$,

c) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^4=\sqrt[3]{3^4}=\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{27\cdot3}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$.

4.5. POTENCIJE S RACIONALNIM EKSPONENTOM

Naučili smo što su potencije s cjelobrojnim eksponentom. Ovdje ćemo vidjeti da se korijeni mogu pisati u obliku potencije s racionalnim eksponentom i da takve potencije imaju slična svojstva onima s cjelobrojnim eksponentom.

Neka je racionalan broj zapisan u obliku razlomka $\dfrac{m}{n}$, gdje je $m\in\mathbf{Z}$, a $n\in\mathbf{N}$.

Tada vrijedi:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

potencije s racionalnim eksponentom

Primjer 1. Zapišimo u obliku korijena s racionalnim eksponentom:

a) $\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}}$,

b) $\sqrt[5]{a^{-2}} = a^{-\frac{2}{5}}$,

c) $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$,

d) $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$,

e) $\sqrt[7]{\frac{1}{a^5}} = \sqrt[7]{a^{-5}} = a^{-\frac{5}{7}}$.

Primjer 2. Napišimo u obliku korijena:

a) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$,

b) $a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}$,

c) $a^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^{-4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^4}}$.

Primjer 3. Izračunajmo:

a) $\left(\frac{625}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{5}{2}$,

b) $\left(-\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$,

c) $(-81)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-81}$ parni korijen nije definiran za $a < 0$.

Već smo napomenuli da je važnost potencija ponajviše u njihovim svojstvima. S potencijama s racionalnim eksponentom računamo slično kao s potencijama s cjelobrojnim eksponentom. Sjetimo se tih pravila.

Neka su r_1 i r_2 dva racionalna broja. Tada vrijedi:

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2},$$
$$a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1-r_2},$$
$$\left(a^{r_1}\right)^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}.$$

pravila računanja s potencijama s racionalnim eksponentom

Primjer 4. Izračunajmo:

$$\left(a^{-\frac{4}{5}}\right)^{-\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{a^{-10}} = a^{-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)} \cdot a^{-\frac{10}{3}} = a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{-\frac{10}{3}} = a^{\frac{4}{3}+\left(-\frac{10}{3}\right)} = a^{-\frac{6}{3}} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}.$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Izračunajte:
   a) $8\sqrt{7}-4\sqrt{2}-\left(7\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=$
   b) $5\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{80}+\frac{1}{5}\sqrt{125}=$
   c) $\sqrt{28}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{40}=$
   d) $\sqrt{\frac{18}{3}}:\sqrt{\frac{2}{75}}=$
   e) $\left(6\sqrt{3}-3\sqrt{6}\right)^2=$
   f) $\sqrt{14.5^2-10.5^2}=$

2. Racionalizirajte nazivnike:
   a) $\frac{36}{\sqrt{3}}=$
   b) $\frac{12}{\sqrt{8}+\sqrt{2}}=$
   c) $\frac{37}{3\sqrt{11}-5}=$

3. Izračunajte:
   a) $\sqrt[17]{-1}-\sqrt[4]{1}-\sqrt[3]{-1}=$
   b) $-\sqrt[3]{8}-5\sqrt[4]{256}+3\sqrt[5]{243}=$
   c) $\sqrt[3]{-162}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{6}}=$
   d) $\sqrt[6]{5}:\sqrt[6]{320}=$

4. Napišite u obliku potencije s racionalnim eksponentom:
   a) $\sqrt{a^{-9}}=$
   b) $\sqrt[7]{b^4}=$
5. Napišite u obliku korijena:
   a) $a^{-\frac{7}{8}}=$
   b) $b^{\frac{11}{2}}=$
6. Izračunajte:
   a) $\left(-\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}}=$
   b) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=$
   c) $\left(a^{-\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{5}{7}}\cdot\sqrt[7]{a^5}=$

5. REALNI BROJEVI

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Koje su vrste decimalnog zapisa racionalnih brojeva?*
2. *Koji brojevi su iracionalni brojevi?*
3. *Kako opisujemo skup realnih brojeva? Što je njegov geometrijski prikaz?*

5.1. DECIMALNI ZAPIS RACIONALNIH BROJEVA

U poglavlju *Decimalni brojevi* vidjeli smo kako racionalne brojeve zapisujemo u obliku decimalnih brojeva i najavili da ćemo ovdje detaljnije proučiti vrstu decimalnog prikaza racionalnog broja.
Dakle, provedemo li razlomkom naznačeno dijeljenje dobivamo **decimalni zapis racionalnog broja**, tj. $\frac{a}{b} = a : b$.

decimalni zapis racionalnog broja

Primjer 1. Odredimo decimalni zapis racionalnih brojeva i rastavimo nazivnike zadanih brojeva na proste faktore:

a) $\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0.625$ i $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$,

b) $\frac{101}{40} = 101 : 40 = 2.525$ i $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$,

c) $\frac{2}{9} = 2 : 9 = 0.222\ldots = 0.\dot{2}$ i $9 = 3 \cdot 3$,

d) $\frac{20}{21} = 20 : 21 = 0.95238095238095\ldots = 0.\dot{9}5238\dot{0}$ i $21 = 3 \cdot 7$,

e) $\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0.8333\ldots = 0.8\dot{3}$ i $8 = 2 \cdot 3$,

f) $\frac{23}{15} = 23 : 15 = 1.5333\ldots = 1.5\dot{3}$ i $15 = 5 \cdot 3$.

Zaključujemo:

Razlomak $\frac{m}{n}$ zapisan u neskrativom obliku ima:
1. konačan decimalni zapis ako se u rastavu nazivnika na proste faktore pojavljuju jedino faktori 2 i/ili 5 (a) i b) dio primjera),
2. beskonačan čisto periodni decimalni zapis ako se u rastavu nazivnika na proste faktore ne pojavljuje ni faktor 2 ni faktor 5 (c) i d) dio primjera),
3. beskonačan mješovito periodni decimalni zapis ako se u rastavu nazivnika na proste faktore uz faktore 2 i/ili 5 pojavljuje i neki drugi (e) i f) dio primjera).

vrsta decimalnog zapisa racionalnog broja

Primjer 2. Bez dijeljenja odredi vrstu decimalnog zapisa racionalnih brojeva:

a) $\frac{23}{30}$ ima beskonačan mješovito periodni decimalni zapis jer je $30 = 5 \cdot 3 \cdot 2$,

b) $\frac{11}{20}$ ima konačan decimalni zapis jer je $20 = 5 \cdot 2 \cdot 2$,

c) $\frac{17}{33}$ ima beskonačan čisto periodni decimalni zapis jer je $33 = 11 \cdot 3$.

Pogledajmo sada obrat. Racionalni broj zapisan u decimalnom obliku često je potrebno napisati u obliku razlomka. Za konačne decimalne brojeve to je jednostavno. Tako je:

$$0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4},\ 2.7 = \frac{27}{10},\ 0.247 = \frac{247}{1000}, \text{ itd.}$$

Primjerom pokažimo kako se to radi za beskonačne periodne decimalne zapise.

Primjer 3. Decimalni broj zapišimo u obliku razlomka:

a) $0.\dot{3}$

Označimo zadani decimalni broj s r. Dakle, $r = 0.\dot{3} = 0.333\ldots$.
Zato je

$$\begin{aligned} 10r &= 3.333\ldots \\ 10r &= 3 + 0.\dot{3} \\ 10r &= 3 + r \\ 9r &= 3 \\ r &= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

b) $0.\dot{1}\dot{3}$

Označimo zadani decimalni broj s r. Dakle, $r = 0.\dot{1}\dot{3} = 0.131313\ldots$.
Zato je

$$\begin{aligned} 100r &= 13.131313\ldots \\ 100r &= 13 + 0.\dot{1}\dot{3} \\ 100r &= 13 + r \\ 99r &= 13 \\ r &= \frac{13}{99}. \end{aligned}$$

Uočavimo: decimalni se broj s čisto periodnim decimalnim zapisom zapisuje u obliku razlomka tako da se u brojnik zapiše period koji se ponavlja, a u nazivnik onoliko znamenaka 9 koliko je znamenaka u periodu ponavljanja.

Primjer 4. Decimalni broj zapišimo u obliku razlomka:

a) $0.\dot{3}5\dot{7}=\dfrac{357}{999}$,

b) $1.\dot{1}23\dot{4}=1+0.\dot{1}23\dot{4}=1+\dfrac{1234}{9999}=\dfrac{11233}{9999}$.

Primjer 5. Decimalni broj $0.91\dot{6}$ zapišimo u obliku razlomka:

Označimo zadani decimalni broj s r. Dakle, $r=0.91\dot{6}=0.91666\ldots$.
Tada je:

$$100r=91.\dot{6}$$
$$100r=91+0.\dot{6}$$
$$100r=91+\frac{6}{9}$$
$$100r=\frac{825}{9}$$
$$r=\frac{825}{900}=\frac{11}{12}.$$

5.2. IRACIONALNI BROJEVI

Iz prethodnih primjera zaključujemo da se svaki racionalni broj može zapisati kao racionalni broj s konačnim ili beskonačnim periodnim decimalnim zapisom. Prirodno se postavlja pitanje što je s decimalnim brojevima koji imaju beskonačan neperiodni decimalni zapis, npr.

$0.1234567891011121314151617181920212223\ldots$ ili
$0.51015202530354045505560758085909510 0\ldots$ ili
$0.12233344445555566666677777778888888\ldots$.

Navedeni brojevi s beskonačnim neperiodnim decimalnim zapisom su primjeri brojeva koji se ne mogu zapisati u obliku razlomka. Brojevi koji se ne mogu napisati u obliku razlomka nazivaju se **iracionalni brojevi**.

skup iracionalnih brojeva

Skup iracionalnih brojeva označavamo oznakom $\mathbf{I}$.

Takvi su npr. brojevi:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \pi.$$

Općenito vrijedi:
Ako n nije kvadrat prirodnog broja onda je $\sqrt{n}$ iracionalan.

Primjer 1. Koji su od navedenih brojeva racionalni, a koji iracionalni:

a) $\dfrac{8}{5}$ je racionalan broj (zapis u obliku razlomka),

b) $\sqrt{100-25}$ je iracionalan broj jer $\sqrt{100-25}=\sqrt{75}$, a 75 nije kvadrat prirodnog broja,

c) $0.56\dot{7}$ je racionalan broj beskonačnog mješovito periodnog decimalnog zapisa,

d) $-8\pi^3+1$ je iracionalan broj jer je π iracionalan broj, pomnožen s racionalnim brojem pa pribrojen racionalnom broju opet daje iracionalan broj,

e) 3.14 je racionalan broj konačnog decimalnog zapisa

f) $\frac{1}{7}\sqrt{7}$ je iracionalan broj jer je $\sqrt{7}$ iracionalan broj koji pomnožen s racionalnim opet daje iracionalan broj,

g) $\sqrt{30+6}$ je racionalan broj jer je $\sqrt{30+6}=\sqrt{36}=6$ koji je prirodan broj, a skup racionalnih brojeva je proširenje skupa prirodnih brojeva.

5.3. REALNI BROJEVI I BROJEVNI PRAVAC

Racionalni i iracionalni brojevi zajedno čine **skup realnih brojeva**. Kažemo i da je skup realnih brojeva unija skupa racionalnih brojeva i skupa iracionalnih brojeva. Skup svih realnih brojeva označavamo slovom **R**.

skup realnih brojeva

Vrijedi dakle:

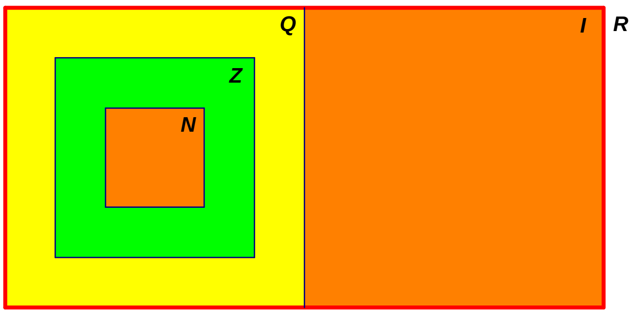
$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I} \text{ i } \mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset.$$

Presjek skupa racionalnih i skupa iracionalnih brojeva je prazan skup, tj. ne postoji broj koji je ujedno i racionalan i iracionalan.

Prisjetimo se još jednom proučenih skupova brojeva i njihovih oznaka:

N … skup prirodnih brojeva
Z … skup cijelih brojeva
Q … skup racionalnih brojeva
I … skup iracionalnih brojeva
R … skup realnih brojeva

Vrijede skupovni odnosi: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ i $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$ i $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$ što možemo prikazati i grafički:



Ponovimo i svojstva operacija zbrajanja i množenja koja vrijede u čitavom skupu realnih brojeva:

$a+b=b+a$	**komutativnost**	$a\cdot b=b\cdot a$
$(a+b)+c=a+(b+c)$	**asocijativnost**	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
$a+0=a$	**neutralni element**	$a\cdot 1=a$
$a+(-a)=0$	**suprotni i inverzni broj**	$a\cdot\frac{1}{a}=a\cdot a^{-1}=1$

svojstva zbrajanja i množenja u skupu realnih brojeva

Broj $-a$ je **suprotan broj** broja a, a broj $\frac{1}{a}=a^{-1}$ **invertni** ili **recipročni broj** broju a, $a\neq 0$.

suprotan broj

recipročni broj

Osim nabrojenih svojstava, ranije smo naveli i svojstvo **distributivnosti (obostrane) množenja prema zbrajanju** (izostavljanje zagrade):

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$$

koje smo tumačili i kao izlučivanje zajedničkog faktora:

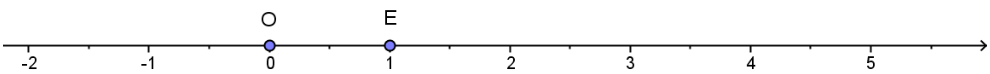
$$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Brojeve grafički predočavamo na **brojevnom pravcu**. To je pravac na kojemu su istaknute dvije točke. Točka O pridružena broju 0, a točka E broju 1. Dužina $\overline{OE}$ naziva se **jedinična dužina**, a njezina duljina je **jedinica mjere**. Točku O nazivamo **ishodište koordinatnog sustava na pravcu**, a točku E **jedinična točka**. Koordinatni sustav na pravcu omogućuje nam da na pravac smjestimo brojeve, tj. da brojevima pridružimo točke pravca. Nanošenjem jedinične dužine desno od točke E odredit ćemo položaj prirodnih brojeva. Ako tu istu dužinu nanosimo lijevo od točke O, odredit ćemo položaj negativnih cijelih brojeva. Tako je udaljenost između svakih dvaju uzastopnih cijelih brojeva jednaka jediničnoj duljini.

brojevni pravac

jedinična dužina

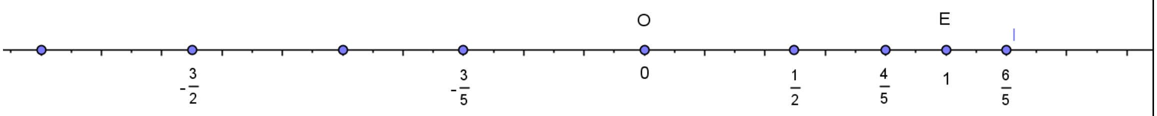
jedinica mjere



Pogledajmo kako ćemo na brojevni pravac smjestiti racionalne brojeve. Ako su m i n prirodni brojevi, onda ćemo racionalan broj $\frac{m}{n}$ smjestiti ovako: jediničnu dužinu podijelimo na n jednakih dijelova i zatim nanesemo m takvih dužina udesno, počevši od broja 0. Ako je m negativan, onda dužine nanosimo lijevo od broja 0.

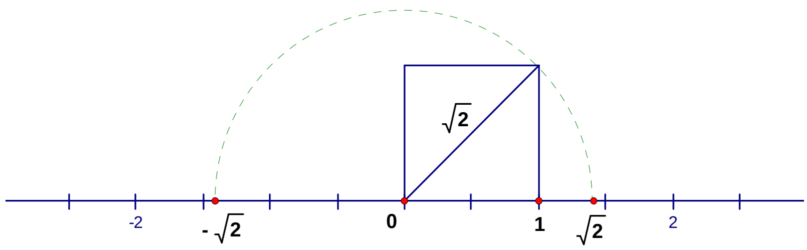
Primjer 1. Na brojevnom pravcu prikažimo brojeve $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{5}$ i $-\frac{3}{5}$.

Broj $\frac{1}{2}$ nalazi se na polovini udaljenosti između 0 i 1. Da bi na brojevni pravac smjestili broj $-\frac{3}{2}$, nanesemo dužinu duljine $\frac{1}{2}$ tri puta lijevo od broja 0. Za prikaz brojeva $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{5}$ i $-\frac{3}{5}$ najprije jediničnu dužinu podijelimo na pet jednakih dijelova, a zatim dužinu duljine $\frac{1}{5}$ nanosimo desno od broja 0 četiri i šest puta da bismo dobili brojeve $\frac{4}{5}$ i $\frac{6}{5}$, a tri puta lijevo od broja 0 da bismo prikazali broj $-\frac{3}{5}$:



Racionalnim brojevima nećemo popuniti čitavi brojevni pravac. Postoje točke na brojevnom pravcu koje nisu pridružene racionalnim brojevima. Te su točke pridružene iracionalnim brojevima.

Odredimo točku brojevnog pravca koja je pridružena iracionalnom broju $\sqrt{2}$. Znamo da duljina dijagonale kvadrata kojemu je stranica jedinična dužina ima duljinu $\sqrt{2}$:



Slično možemo odrediti točke pridružene iracionalnim brojevima $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $1+\sqrt{2}$, itd.

Smještanje iracionalnih brojeva na brojevnom pravcu nije jednostavno, ali njima popunjavamo praznine koje su na brojevnom pravcu ostale smještanjem racionalnih brojeva. Sada možemo reći:

Svakom realnom broju pridružena je točno jedna točka brojevnog pravca i svakoj točki brojevnog pravca pridružen je točno jedan realni broj.

realni brojevi i brojevni pravac

Zato točke brojevnog pravca možemo poistovjetiti s realnim brojevima. Kažemo i da je brojevni pravac geometrijski prikaz (geometrijska interpretacija) skupa realnih brojeva, a nazivamo ga još i **realni pravac** ili **realna os**.

Realni broj x kojemu je pridružena točka T brojevnog pravca naziva se **koordinata točke** T i označava $T(x)$. Riječ koordinata i točka često smatramo istoznačnicama i zamjenjujemo ih.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Racionalne brojeve napišite u decimalnom obliku:
   a) $\frac{4321}{10000} =$
   b) $\frac{5}{11} =$

2. Bez dijeljenja odredite vrstu decimalnog zapisa racionalnih brojeva:
   a) $\frac{3}{40}$,
   b) $\frac{17}{12}$,
   c) $\frac{3}{77}$.

3. Decimalne brojeve zapišite u obliku razlomaka:
   a) $4.0123 =$
   b) $1.\dot{3}2\dot{1} =$
   c) $0.1\dot{4} =$

4. Zaokružite iracionalne brojeve:
   $$\sqrt{11} - 0.5,\ \sqrt{12+13},\ \frac{1}{3}\sqrt{3},\ 0.333,\ -\pi,\ 0.22\dot{6},\ \sqrt{100-81},\ -\frac{7}{4}$$

5. Na brojevnom pravcu prikažite brojeve $\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{4}$, $\frac{7}{5}$, $-\frac{8}{5}$, $2+\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$.

6. KOORDINATNI SUSTAV U RAVNINI

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Kako uvodimo koordinatni sustav u ravninu?*
2. *Kako računamo udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini?*

6.1. KOORDINATNI SUSTAV

U prethodnom smo poglavlju vidjeli da su točke pravca i realni brojevi međusobno pridruženi. To pridruživanje izražavamo brojevnim pravcem.

Postavimo u ravnini dva okomita brojevna pravca tako da im ishodišta budu u istoj točki. Tada kažemo da smo u ravninu uveli **pravokutan** ili **Kartezijev koordinatni sustav**.

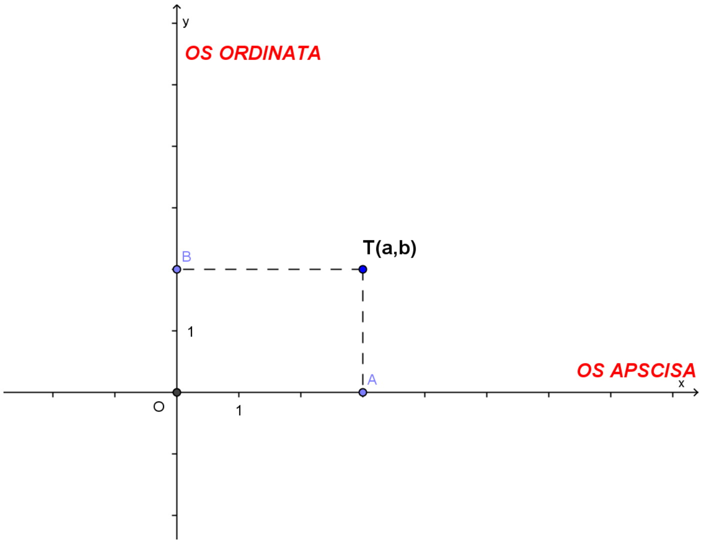
pravokutan koordinatni sustav

Ravnina s uvedenim pravokutnim koordinatnim sustavom naziva se **koordinatna ravnina**, a polazni brojevni pravci **koordinatne osi**. Sjecište O tih pravaca nazivamo **ishodište koordinatnog sustava**. Koordinatne osi označavamo oznakama x i y i nazivamo **x-os** ili **os apscisa**, odnosno **y-os** ili **os ordinata**.

koordinatna ravnina

koordinatne osi

ishodište koordinatnog sustava



U koordinatnom sustavu točkama pridružujemo uređene parove realnih brojeva. Prisjetimo se, dva broje čine **uređen par** brojeva ako se zna koji je od njih prvi, a koji drugi broj.

Točku T koja je određena uređenim parom (a,b) realnih brojeva odredit ćemo na sljedeći način: na osi apscisa odredimo točku A s koordinatom a, a na osi ordinata točku B s koordinatom b (na kraju prethodnog poglavlja govorili smo o točkama brojevnog pravca i njihovim koordinatama). Točkama A i B položimo pravce paralelne s koordinatnim osima. Oni se sijeku u točki T koja je pridružena uređenom paru (a,b) dvaju realnih brojeva. Kažemo da su a i b **koordinate točke** T. Broj a je njezina **prva koordinata** ili **apscisa**, a broj b njezina **druga koordinata** ili **ordinata**.

koordinate točke

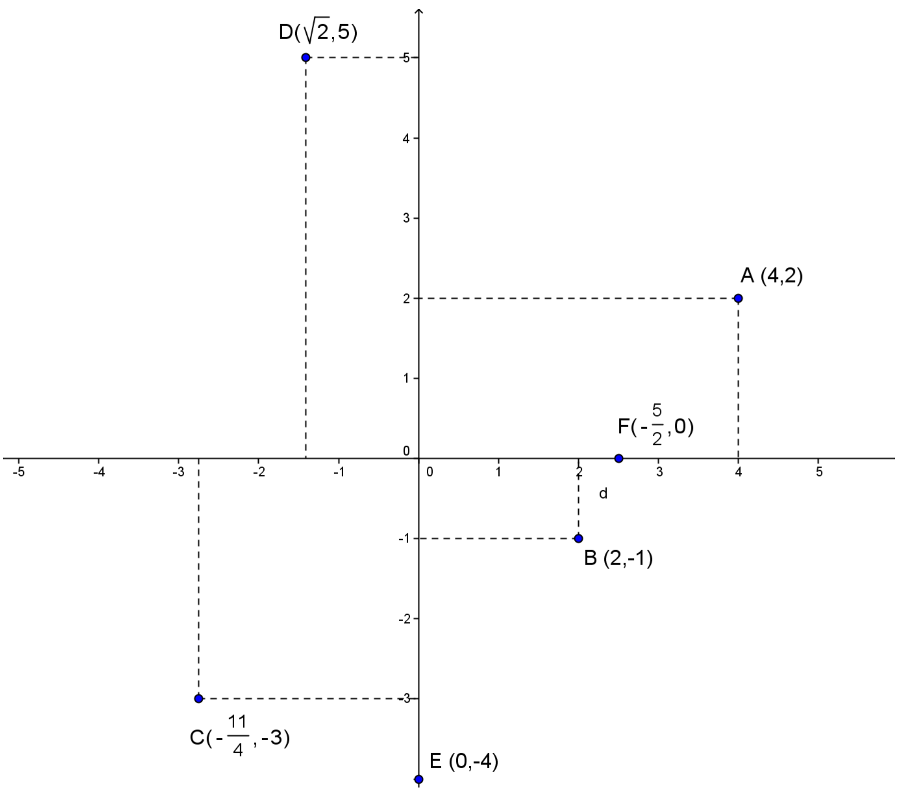
apscisa

ordinata

Primjer 1. U koordinatnom sustavu prikažimo točke:

$$A(4,2),\ B(2,-1),\ C\left(-\frac{11}{4},-3\right),\ D\left(-\sqrt{2},2\right),\ E(0,-4) \text{ i } F\left(\frac{5}{2},0\right).$$

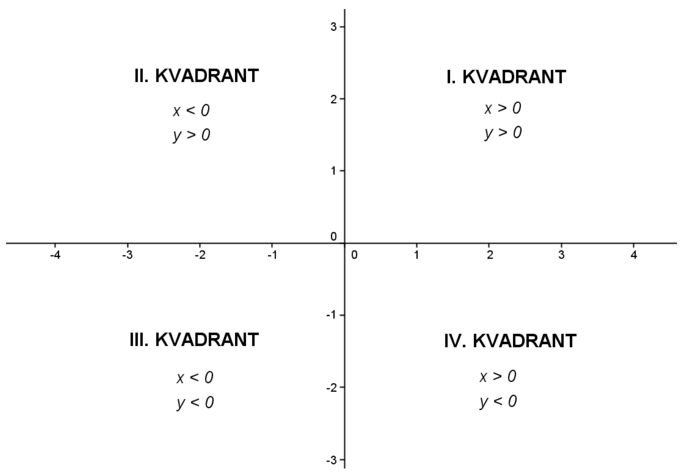
Postupajući prema opisanom, dolazimo do slike:



Zaključujemo:
Uređeni par realnih brojeva (a,b) određuje točno jednu točku T ravnine i obrnuto, točki T ravnine pridružen je točno jedan par uređenih brojeva (a,b).

Koordinatne osi dijele ravninu na četiri dijela koje nazivamo **kvadranti**. Kvadrante karakteriziraju predznaci koordinata njihovih točaka:

kvadranti



Primjer 2. Odredimo u kojem su kvadrantu točke:
$A(-5,3)$, $B(2,7)$, $C(0,6)$, $D(-10,0)$, $E(5,-5)$ i $F(-1,-1)$.

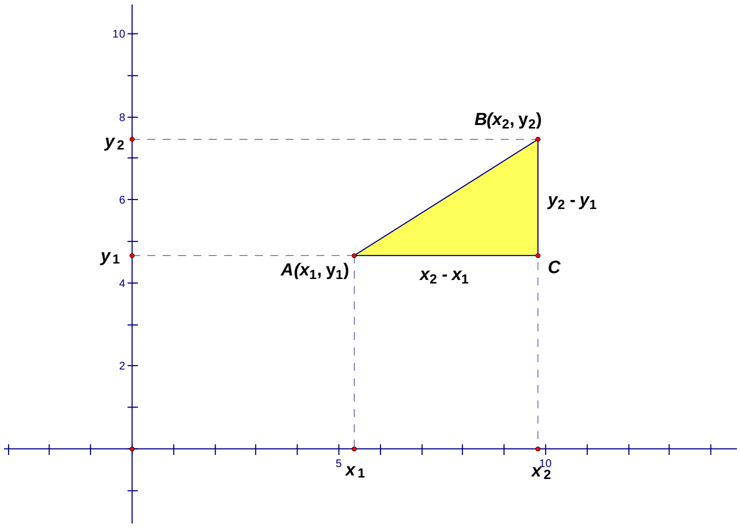
Toka A pripada II. kvadrantu, točka B I. kvadrantu, točka E IV. kvadrantu, a točka F III. kvadrantu. Točka C pripada osi apscisa, a točka D osi ordinata.

6.2. UDALJENOST TOČAKA U KOORDINATNOJ RAVNINI

U prethodnom smo odjeljku vidjeli da je točka u koordinatnoj ravnini jednoznačno određena svojim koordinatama. Pogledajmo sada kako pomoću koordinata točaka možemo odrediti njihovu udaljenost.

Neka su svojim koordinatama dane točke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$. Uvedimo oznaku:

$|AB| = d(A, B)\ldots$ udaljenost točaka A i B.



Promotrimo sliku. Uočimo pravokutni trokut ABC i primijenimo Pitagorin poučak:

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2},$$

odnosno

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Dobili smo formulu za udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ u koordinatnoj ravnini.

formula za udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini

Uočimo da možemo zamijeniti mjesta točkama A i B jer vrijedi:

$$|AB| = |BA|.$$

Primjer 1. Odredimo udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini:

a) $A(-2,1)$ i $B(6,7)$.
Služeći se formulom za udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini, uz $x_1 = -2$, $y_1 = 1$, $x_2 = 6$ i $y_2 = 7$, dobivamo:
$|AB| = \sqrt{(6-(-2))^2 + (7-1)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$.

b) $M(-2,-3)$ i $N(-1,0)$.
Služeći se formulom za udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini, uz

$x_1 = -2$, $y_1 = -3$, $x_2 = -1$ i $y_2 = 0$, dobivamo:

$|MN| = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (0-(-3))^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

c) $S(-\sqrt{5},4)$ i $T(0,4)$.

Služeći se formulom za udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini, uz $x_1 = -\sqrt{5}$, $y_1 = 4$, $x_2 = 0$ i $y_2 = 4$, dobivamo:

$|ST| = \sqrt{(0-(-\sqrt{5}))^2 + (4-4)^2} = \sqrt{\sqrt{5}^2 + 0^2} = \sqrt{5}$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. U koordinatnom sustavu prikažite točke:
   $A(4,-1)$, $B(0,-\sqrt{2})$, $C\left(-\frac{11}{2},0\right)$, $D\left(-\frac{12}{5},-5\right)$, $E(2\sqrt{3},4)$ i $F(-2.25,3.25)$.
2. Odredite udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini:
   a) $A(-4,-2)$ i $B(3,1)$,
   b) $M\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ i $N\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$,
   c) $S(3,0)$ i $T(3,-\sqrt{2})$.

7. LINEARNA FUNKCIJA

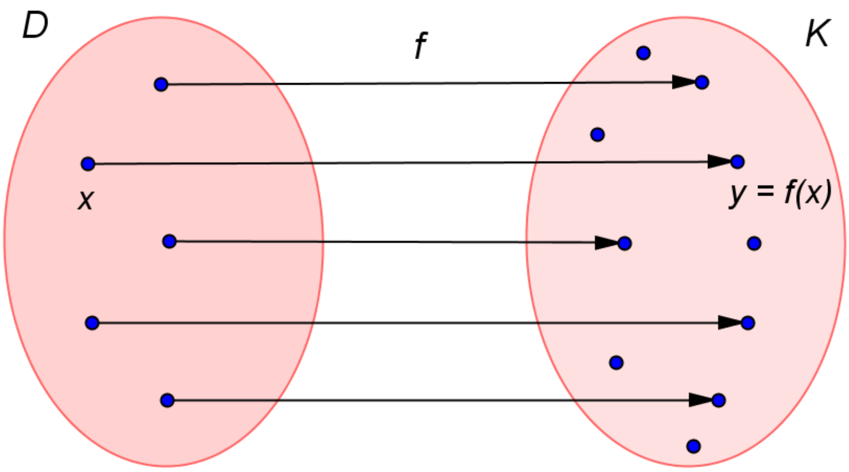
Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. *Što je funkcija i koji su temeljni pojmovi koje vežemo uz pojam funkcije?*
2. *Kojeg je oblika linearna funkcija, vrlo česta u svakodnevnom životu?*

7.1. POJAM FUNKCIJE

Neka su D i K dva neprazna skupa. **Funkcija** f sa skupa D u skup K je pravilo (postupak) koje **svakom** elementu skupa D pridružuje **točno** jedan element skupa K, pišemo: $f : D \to K$ ili $x \mapsto y = f(x)$.

pojam funkcije



Skup D nazivamo **područje definicije** ili **domena** funkcije, a skup K **područje vrijednosti** ili **kodomena** funkcije f.

domena

kodomena

Element x skupa D nazivamo **argument funkcije** (**nezavisna varijabla** ili ulazna vrijednost funkcije), a njemu pridruženi element y, oznaka $y = f(x)$, nazivamo **vrijednost funkcije** (**zavisna varijabla**, izlazna vrijednost funkcije ili rezultat djelovanja funkcije na nezavisnu varijablu).

argument funkcije

vrijednost funkcije

7.2. LINEARNA FUNKCIJA

Linearna funkcija je najjednostavnija funkcija koja se pojavljuje u matematici, fizici i drugim prirodnim znanostima. Često i u svakodnevnim situacijama možemo modelirati pomoću linearne funkcije.

Funkciju oblika $f(x) = ax + b$, gdje su a i b realni brojevi i $a \neq 0$ nazivamo **linearna funkcija**.

linearna funkcija

Evo nekoliko primjera linearnih funkcija:

$$f(x) = 2x + 5,\ f(x) = -4x + \frac{1}{2},\ f(x) = 5.5x,\ f(x) = \sqrt{2}x - 3, \text{ itd.}$$

Primjer 1. Neka je $f(x) = 3x + 1$. Odredimo:

a) $f(0) = 3 \cdot 0 + 1 = 1$,

b) $f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10$,

c) $f(-2) = 3 \cdot (-2) + 1 = -5$,

d) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$.

Linearna funkcija dobila je ime po tome što je njezin graf pravac (od lat. *linea*).

Graf linearne funkcije $f(x)=ax+b$ je pravac jednadžbe $y=ax+b$.
Jednadžbu pravca $y=ax+b$ nazivamo **eksplicitni oblik jednadžbe pravca**.
Koeficijent a nazivamo **koeficijent smjera** ili **nagib pravca**, a koeficijent b **odsječak na y-osi** ili **pomak po y-osi**.

graf linearne funkcije = pravac

koeficijent smjera

odsječak na y-osi

Primjer 2. U istom koordinatnom sustavu nacrtaj pravce:

a) $y=2x$,
b) $y=2x+3$,
c) $y=2x-1$,
d) $y=-\frac{1}{2}x+1$.

Odredimo nekoliko točaka zadanih pravaca:

a)

x	0	1	2
$y=2x$	0	2	4

b)

x	0	1	-1
$y=2x+3$	3	5	1

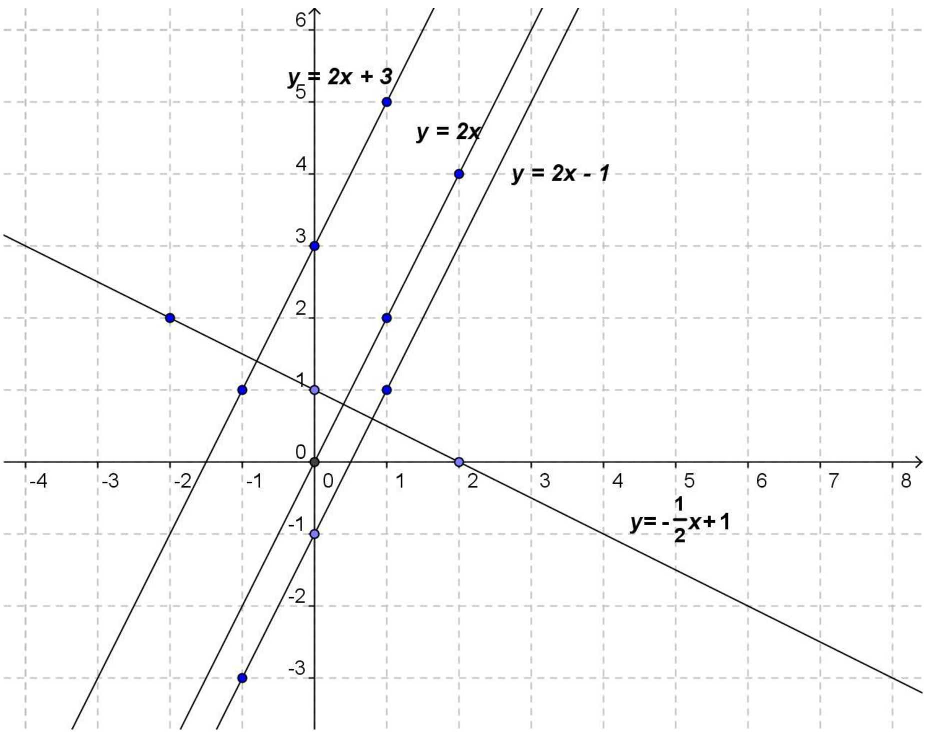
c)

x	0	1	-1
$y=2x-1$	-1	1	-3

d)

x	0	2	-2
$y=-\frac{1}{2}x+1$	1	0	2

Predočimo točke u koordinatnom sustavu i nacrtajmo pravce:



Promotrimo li sliku vidimo da su pravci $y = 2x$, $y = 2x + 3$ i $y = 2x - 1$ rastući pravci (kada raste vrijednost x, raste i vrijednost funkcije y), a pravac $y = -\frac{1}{2}x + 1$ padajući (kada raste vrijednost x, vrijednost funkcije y pada).
O rastu i pada pravca govori koeficijent smjera (nagib pravca) odakle i njegovo ime:

Pravac $y = ax + b$ raste ako je $a > 0$, a pada ako je $a < 0$.

rast i pad pravca

Dalje, vidimo da su pravci $y = 2x$, $y = 2x + 3$ i $y = 2x - 1$ međusobno paralelni pa zaključujemo:

Pravci su međusobno paralelni ako i samo ako imaju jednake koeficijente smjera, tj:

$$y = a_1 x + b_1 \parallel y = a_2 x + b_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 .$$

uvjet paralelnosti pravaca

Pravci $y = 2x$ i $y = -\frac{1}{2}x + 1$ međusobno su okomiti (a onda i pravci $y = 2x + 3$ i $y = -\frac{1}{2}x + 1$ te $y = 2x - 1$ i $y = -\frac{1}{2}x + 1$).

Pravci su međusobno okomiti ako i samo ako su njihovi koeficijenti smjera suprotni i recipročni, tj:

$$y = a_1 x + b_1 \perp y = a_2 x + b_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{a_2} .$$

uvjet okomitosti pravaca

Pogledajmo dalje u kojim točkama zadani pravci sijeku y-os. Pravac $y = 2x$ prolazi ishodištem koordinatnog sustava, tj. siječe y-os u točki $(0,0)$, pravac $y = 2x + 3$ u točki $(0,3)$, pravac $y = 2x - 1$ u točki $(0,-1)$, a pravac $y = -\frac{1}{2}x + 1$ u točki $(0,1)$. Pročitajmo njihove odsječke na y-osi. Oni su redom 0, 3, -1 i 1.

Zaključujemo:

Pravac $y = ax + b$ siječe y-os u točki $(0, b)$.
Pravac $y = ax$ prolazi ishodištem koordinatnog sustava.

Primjer 2. Odgovorimo na sljedeća pitanja:

a) Pripada li točka $A(-2,1)$ pravcu $y = -2x - 5$? Zašto?
   Točka pripada pravcu ako njezine koordinate ispunjavaju jednadžbu pravca.
   Uvrstimo li koordinate točke A u jednadžbu pravca dobivamo:
   $1 = -2 \cdot (-2) - 5$, odnosno $1 = -1$, što ne vrijedi pa zaključujemo da točka A ne pripada zadanom pravcu.

b) Odredimo ordinatu točke T ako ona pripada pravcu $y=-2x+4$ i ako je njezina apscisa -3.
Iz istog razloga kao u a) dijelu zadatka imamo:
$y=-2\cdot(-3)+4=10$, odnosno ordinate točke T jednaka je 10.

c) Napišimo jednadžbu pravca koji raste i prolazi točkom $\left(0,\frac{3}{4}\right)$.
Budući da je traženi pravac rastući, njegov koeficijent smjera može biti bilo koji $a>0$, a budući da prolazi točkom $\left(0,\frac{3}{4}\right)$ njegov odsječak na y-os je $b=\frac{3}{4}$. Jednadžba jednog takvog pravca je $y=x+\frac{3}{4}$.

d) Napišimo jednadžbu dvaju pravaca koji su paralelni s pravcem $y=-2x+5$.
Pravci su paralelni ako imaju jednake koeficijente smjera pa su jednadžbe traženih pravaca npr: $y=-2x-1$ i $y=-2x+\sqrt{2}$.

e) Napišimo jednadžbu pravca koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava i okomit je na pravac $y=-3x+4$.
Traženi pravac prolazi ishodištem koordinatnog sustava pa je $b=0$ i okomit je na pravac $y=-3x+4$ pa je $a=\frac{1}{3}$ jer okomiti pravci imaju suprotne i recipročne koeficijente smjera. Slijedi da je jednadžba traženog pravca $y=\frac{1}{3}x$.

Pogledajmo još pravce koji su paralelni s koordinatnim osima:

Za $a=0$ funkcija poprima oblik $f(x)=b$, gdje je $b\in\mathbf{R}$. Nazivamo je **konstantna funkcija**. Njezin graf je pravac jednadžbe $y=b$.

konstantna funkcija

Primjer 3. Nacrtajmo graf funkcije:

pravci paralelni s koordinatnim osima

a) $f(x)=3$,
b) $f(x)=-2$.

Grafovi zadanih funkcija su pravci jednadžba $y=3$ i $y=-2$. Odredimo neke njihove točke i nacrtajmo ih:

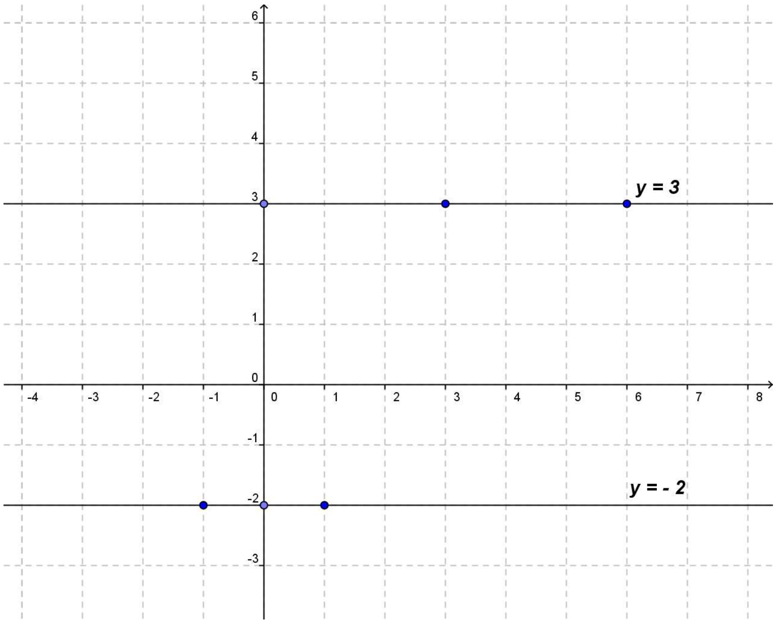
a)

x	0	3	6
$y=3$	3	3	3

b)

x	0	1	-1
$y=-2$	-2	-2	-2

Druga koordinata svih točaka pravca $y = 3$ jednaka je 3, a pravca $y = -2$ jednaka je -2.

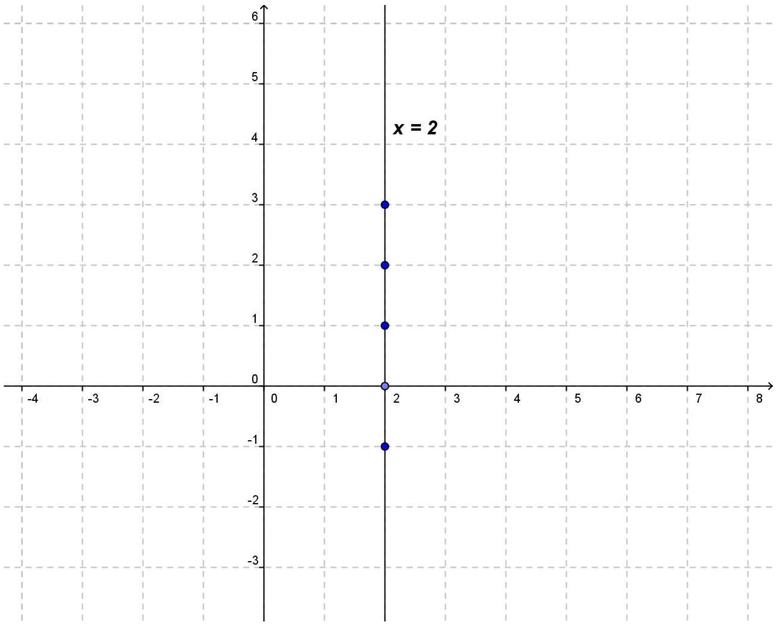


Zapamtimo: graf funkcije $f(x) = b$ je pravac $y = b$ koji je paralelan s x-osi i koji prolazi točkom $(0, b)$.

pravac paralelan s x-os

Primjer 4. U koordinatnom sustavu prikažimo sada skup svih točaka kojima je prva koordinata jednaka 2.

Neke od tih točaka su $(2,0)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(2,-1)$. Pogledajmo prikaz u koordinatnoj ravnini.



Vidimo da je traženi skup točaka pravac paralelan s y-osi. Kažemo da je $x = 2$ jednadžba tog pravca.

Općenito: pravac koji je paralelan s y-osi i prolazi točkom $(c,0)$ ima jednadžbu $x = c$, gdje je $c \in \mathbf{R}$.

pravac paralelan s y-osi

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. U istom koordinatnom sustavu nacrtajte pravce zadane jednadžbama:
   a) $y = -\frac{2}{3}x$,
   b) $y = -\frac{2}{3}x + 3$,
   c) $y = \frac{3}{2}x - 2$,
   d) $y = x$,
   e) $x = 4$,
   f) $y = -1$.

2. Zadana je pravac $y = \frac{2}{5}x - 4$.
   a) Nacrtajte zadani pravac.
   b) Da li je zadani pravac raste ili pada? Zašto?
   c) Napišite jednadžbe bar dvaju pravaca koji su paralelni sa zadanim pravcem.
   d) Napišite jednadžbu pravca koji prolazi ishodištem i okomit je na zadani pravac.
   e) Odredite točku zadanog pravca kojoj je apscisa -15.
   f) U kojoj točki zadani pravac siječe x-os, a u kojoj siječe y-os?

8. LINEARNE JEDNADŽBE

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. Što je linearna jednadžba? Koji su koraci u rješavanju linearne jednadžbe?
2. Kako nam jednadžbe mogu pomoći u rješavanju svakodnevnih rješenja?

8.1. LINEARNE JEDNADŽBE S JEDNOM NEPOZNANICOM

linearna jednadžba s jednom nepoznani-com

Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom je jednadžba oblika $ax + b = 0$, gdje su a i b realni brojevi i $a \neq 0$.

Riješiti linearnu jednadžbu znači odrediti takav realan broj koji uvršten u jednadžbu umjesto nepoznanice x daje istinitu brojčanu jednakost.

Dvije jednadžbe su **ekvivalentne** ako imaju isto rješenje.

Linearnu jednadžbu rješavamo tako da je uzastopnom primjenom svojstava realnih brojeva svodimo na jednostavniju, ali ekvivalentnu jednadžbu.

postupak rješavanja linearne jednadžbe

U postupku rješavanja linearnih jednadžbi primjenjujemo sljedeća svojstva:

1. Ako lijevoj i desnoj strani jednadžbe dodamo ili oduzmemo isti broj, rješenje se ne mijenja. Ovo svojstvo često tumačimo: ako u jednadžbi članove prebacujemo na drugu stranu znaka jednakosti (s lijeve na desnu ili s desne na lijevu), mijenjamo im predznake.
2. Ako lijevu i desnu stranu jednadžbe pomnožimo ili podijelimo istim brojem različitim od nule, rješenje se ne mijenja.

Primjer 1. Riješimo jednadžbu: $8x-2+x=5x-10$.

I na lijevoj i na desnoj strani jednadžbe su i poznati i nepoznati članovi. Nepoznate ćemo napisati na jednoj, a poznate članove na drugoj strani jednadžbe. Prema 1. svojstvu: ako poznate ili nepoznate članove prebacimo s jedne na drugu stranu jednakosti, promijenit ćemo im predznak.

$$8x+x-5x=2-10$$

Primjenom svojstva distributivnosti dobivamo:

$$4x=-8 \quad / :4 \qquad \text{(primijenimo 2. svojstvo)}$$
$$x=-2$$

Provjera: $8\cdot(-2)-2+(-2)=5\cdot(-2)-10$

$$-20=-20$$

Broj -2 je rješenje jednadžbe.

Primjer 2. Riješimo jednadžbu:

$$35-2\cdot[3\cdot(2x-5)-5\cdot(9-x)]=3\cdot(4x-13)-7x+5.$$

Najprije se, primjenom svojstva distributivnosti, rješavamo zagrada, od unutarnje prema vanjskoj. Nakon toga, postupamo kao u *Primjeru 1.*

$$35-2\cdot[6x-15-45+5x]=12x-39-7x+5$$
$$35-12x+30+90-10x=12x-39-7x+5$$
$$-27x=-189 \quad / :(-27)$$
$$x=7$$

Provjerite je li $x=7$ rješenje zadane jednadžbe.

Primjer 3. Riješimo jednadžbu: $1-\frac{x+6}{5}=\frac{x}{2}-3$.

Svaki član jednadžbe najprije množimo s najmanjim zajedničkim nazivnikom (najmanjim zajedničkim višekratnikom) brojeva 5 i 2, tj. brojem 10:

$$10-2\cdot(x+6)=5x-30$$
$$10-2x-12=5x-30$$
$$-2x-5x=-10+12-30$$
$$-7x=-28 \ / :(-7)$$
$$x=4$$

Provjerite je li $x=4$ rješenje zadane jednadžbe.

Primjer 4. Riješimo jednadžbu: $\frac{1}{x^2-x}-\frac{x}{x-1}=-1$.

Najprije nazivnike razlomaka rastavimo na faktore:

$$\frac{1}{x(x-1)}-\frac{x}{x-1}=-1 \qquad \text{Uvjeti: } x\neq 0 \text{ i } x\neq 1$$

Zatim odredimo najmanji zajednički višekratnik nazivnika. To je broj $x(x-1)$.
Njime pomnožimo svaki član jednadžbe:

$$1-x^2=-x^2+x$$

Dobivena jednadžba nije ekvivalentna zadanoj zato što brojevi 0 i 1 mogu biti njezina rješenja, ali nijedan od njih ne može biti rješenje zadane jednadžbe.
Nastavimo s rješavanjem i dobijemo: $x=0$.
Za $x=0$ u prvom razlomku zadane jednadžbe dobivamo nulu u nazivniku.
Stoga jednadžba nema rješenje.

8.2. PRIMJENA LINEARNE JEDNADŽBE

Zadatke zadane tekstom koji se svode na rješavanje linearne jednadžbe nazivamo problemima prvog stupnja.

Oni u sebi sadrže neki realan, praktičan problem s kojim se susrećemo u svakodnevnom životu, a za njihovo rješavanje nema posebnih recepata.
No, rješavanje provodimo u nekoliko koraka:

1. Razumijevanje problema.
2. Odabiranje nepoznate veličine.
3. Postavljanje jednadžbe.
4. Rješavanje jednadžbe.
5. Formuliranje odgovora riječima.

Primjer 1. Za školu je kupljeno ukupno 18 velikih i malih lopti za 753 kune. Cijena velike lopte je 62.5 kuna, a male 31.5 kuna. Koliko je kupljeno velikih, a koliko malih lopti.

primjena linearne jednadžbe na zadatke iz svakodnevnog života

Ako s x označimo broj kupljenih velikih lopti, onda je $18-x$ broj kupljenih malih lopti. Prema uvjetima zadatka pišemo jednadžbu:

$$62.5x + 31.5(18 - x) = 753$$

Rješavanjem jednadžbe dobivamo $x = 6$.
Velikih lopti je kupljeno 6, a malih $18 - 6 = 12$.

Primjer 2. Otac ima 28 godina, a sin 4 godine. Za koliko će godina otac biti tri puta stariji od sina?

Za x godina će otac imati $28 + x$ godina, a sin $4 + x$. Prema uvjetima zadatka pišemo jednadžbu:

$$28 + x = 3(4 + x)$$

Rješenje jednadžbe je $x = 8$.
Za 8 godina otac će biti tri puta stariji od sina, tj. otac će imati 36 godina, a sin 12 godina.

Primjer 3. Iz mjesta A prema udaljenom mjestu B krene autobus i vozi stalnom brzinom od 70 km/h. Dva sata nakon njega na isti put krene automobil i vozi stalnom brzinom od 110 km/h. Za koliko vremena će automobil sustići autobus?

Za x sati vožnje autobusa automobil će voziti $x - 2$ sata pa vrijedi:

$$70 \cdot x = 110 \cdot (x - 2)$$

Rješenje je $x = 5.5$ sati, tj. automobil će sustići autobus za 5h i 30min.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Riješite jednadžbe:
   a) $31x - 5 - 3 \cdot \{2x - 3 \cdot [2x - 3 \cdot (2x - 3)]\} = -1$
   b) $\frac{5x+1}{2} - \frac{1-3x}{4} - \frac{2x+3}{8} = \frac{x-3}{4} + \frac{5}{2}$
   c) $2 - \frac{1}{3} \cdot \left(9 + \frac{5}{2}x\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\right)$
   d) $x - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)\right] = x - \frac{x-2}{3}$
   e) $\frac{x+1}{4} - 3 \cdot \left[\frac{x}{2} - \frac{2}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = 1 - \frac{x-6}{6}$
   f) $\frac{5}{3x+4} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(x-1)(3x+4)}$
   g) $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1}$
2. Ivan je zamislio broj, pomnožio ga s $\frac{2}{3}$, od umnoška oduzeo 4, razliku podijelio s -2 i količniku pribrojio 8. Nakon računanja dobio je rezultat 5. Koji je broj zamislio?

3. Kad je biciklist prešao trećinu puta, do polovine puta ostalo mu je prijeći još 16 km. Koliko je dug put?

4. U parku je zasađeno 219 stabala. Hrastova je zasađeno tri puta manje nego javora, breza 14 više nego hrastova, a topola dva puta manje nego breza. Koliko je zasađeno stabala pojedine vrste?

5. Svi učenici neke škole planiraju ići na izlet. Ako naruče 15 jednakih autobusa, ostat će 16 praznih sjedala. Ako naruče 14 takvih autobusa, za 20 učenika neće biti sjedećih mjesta. Koliko sjedala ima svaki autobus i koliko učenika ima u toj školi?

KONTROLNA ZADAĆA – ZADACI ZA SAMOPROVJERU ZNANJA

PRIMJER PISANOG ISPITA ZNANJA IZ MATEMATIKE

1. Izračunaj:

a) $(-27+18)\cdot(7-10)=$

b) $-27+18\cdot(7-10)=$

c) $(-27+18)\cdot 7-10=$

d) $-27+18\cdot 7-10=$

2. Izračunaj:

a) $-[-(35+14)-(3-35)]-\{-19-[-9+(-5-19+9)]\}=$

b) $-[-(3-7)\cdot(-6)]-(-11)+5\cdot[-3+25:(-5)]=$

c) $-\frac{-14}{27}-\left(-\frac{6}{27}\right)-\frac{-23}{-27}=$

d) $2-1\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{7}=$

e) $\frac{1}{7}+6:\left(\frac{1}{3}-5\right)+5\frac{2}{7}:37=$

f) $\dfrac{\frac{8}{13}-\frac{5}{39}:\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{10}{13}+\frac{7}{26}}-\frac{2}{3}=$

g) $39.42:18-(5.6-3.9)\cdot 2.8=$

3. Izračunaj:

a) $\dfrac{3^{12}x^{3}y^{2}}{3^{9}x^{-4}y^{3}}=$

b) $\left(3a^{-3}b^{4}c^{5}\right)^{2}\cdot\left(2a^{3}b^{-2}c^{5}\right)^{4}=$

c) $\dfrac{16^{6}\cdot 2^{9}}{8^{5}\cdot 32^{4}}=$

4. Primjenom formula za kvadrat zbroja, kvadrat razlike i razliku kvadrata, izračunaj:

a) $\left(4a^{2}b^{4}+3a^{6}b^{8}\right)^{2}=$

b) $\left(\frac{6}{7}x+8y^{2}\right)\cdot\left(\frac{6}{7}x-8y^{2}\right)=$

c) $\left(\frac{5}{x^{5}}-x^{7}\right)^{2}=$

5. Napiši u obliku produkta (rastavi na faktore):

a) $\frac{81}{100}x^{8}-\frac{1}{4}y^{2}=$

b) $25a^{12}+4a^{6}b^{5}+0.16b^{10}=$

c) $4b^{2}\cdot(1-b)-100\cdot(1-b)=$

6. Skrati razlomke:

a) $\frac{12a^3-15a^2b}{24a^3b-30a^2b^2}=$

b) $\frac{3a^2-27}{6a^2-18a}=$

7. Izračunaj:

a) $\frac{10a+5b}{2a^2-2a}\cdot\frac{a^2-1}{2a+b}=$

b) $\frac{x^2y-y^3}{x^2+4x+4}:\frac{12xy-12y^2}{4xy+8y}=$

c) $\frac{8a+5}{2}-\frac{a-7}{4}-\frac{6a-6}{8}=$

8. Izračunaj:

a) $5\sqrt{45}-4\sqrt{80}+3\sqrt{5}=$

b) $\sqrt{\frac{11}{48}}:\sqrt{\frac{44}{75}}=$

c) $\sqrt{26^2-10^2}=$

d) $-\sqrt[3]{-8}-5\sqrt[3]{64}+2\sqrt[5]{32}=$

e) $\sqrt[5]{-192}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{6}}=$

9. Racionaliziraj nazivnike:

a) $\frac{39}{\sqrt{13}}=$

b) $\frac{16}{\sqrt{21}+\sqrt{5}}=$

10. Napiši u obliku potencije s racionalnim eksponentom:

a) $\sqrt{a^{-3}}=$

b) $\sqrt[7]{b^6}=$

11. Napiši u obliku korijena:

a) $a^{-\frac{10}{7}}=$

b) $b^{\frac{11}{2}}=$

12. Izračunaj:

a) $\left(-\frac{64}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=$

b) $\left(\frac{1}{625}\right)^{\frac{1}{4}}=$

13. Bez dijeljenja odredi vrstu decimalnog zapisa racionalnih brojeva:

a) $\frac{7}{250}$

b) $\frac{5}{108}$

14. Decimalne brojeve zapiši u obliku razlomaka:

a) $0.111=$

b) $0.\dot{2}\dot{8}=$

15. Zaokruži iracionalne brojeve:

$$\sqrt{11}+5,\ 1.41,\ -\frac{2}{5}\sqrt{5},\ -11\pi^2,\ \sqrt{100-25},\ \sqrt{25+24},\ 0.33\dot{6},\ \frac{3}{11}$$

16. U koordinatnom sustavu prikaži točke $A\left(-\sqrt{2},-4\right)$ i $B(0,3)$ i računski odredi njihovu udaljenost.

17. U istom koordinatnom sustavu nacrtaj pravce:

a) $y=-\frac{3}{2}x+2$, b) $y=\frac{2}{3}x-3$, c) $y=x$, d) $y=2$, e) $x=-3$.

18. Riješi jednadžbe:

a) $2x-3-6\cdot(3x-4)=4x-(9+5x)$, b) $\frac{3-2x}{3}-\frac{x+1}{2}=1-\frac{5x-1}{6}$.

KORIŠTENA LITERATURA:

[1] Ivan Mrkonjić, *Matematika u struci* 1, udžbenik sa zbirkom zadataka, Neodidacta, Zagreb, 2007.
[2] I. Gusić, J. Krajina, *Matematika* 1, udžbenik sa zbirkom zadataka za strukovne škole, I. i II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2007.
[3] Branimir Dakić, Neven Elezović, Matematika 1, Udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija, 1. i 2. dio, Element, Zagreb, 2006.