ŠKOLA ZA CESTOVNI PROMET
Zagreb

NASTAVNO PISMO
ZA PROGRAME OBRAZOVANJA ODRASLIH

Nastavni predmet:

MATEMATIKA

4. RAZRED

Zanimanje:

TEHNIČAR CESTOVNOG PROMETA

Autor: Marija Mlinarević, prof.

Zagreb, 2010.

KAKO KORISTITI NASTAVNO PISMO?

Cijenjeni polaznici,

Svrha nastavnog pisma je olakšati Vam organizaciju samostalnog učenja, pripremanje i polaganje ispita te uspješno završavanje upisanog programa.

Na početku nastavnog pisma nalazi se sadržaj koji daje najkraći uvid u strukturu teksta, odnosno orijentacijski uvid u nastavne cjeline i jedinice koje su razrađene u nastavnom pismu i s kojima ćete se upoznati.

U razradi nastavnih cjelina definirani su novi pojmovi i objašnjena pravila i postupci koje koristimo u rješavanju zadataka. Slijedi niz detaljno objašnjenih primjera, popraćenih skicama i slikama, kroz koje uvježbavamo uvedeno. Pojmovi i pravila koje uvodimo, zbog lakšeg i bržeg snalaženja, istaknuti su na marginama. Prilikom učenja na margine možete zapisivati svoje osobne bilješke jer je nastavno pismo zamišljeno kao radni udžbenik.

Iza svake nastavne cjeline nalaze se zadaci za vježbu koje je dobro riješit nakon proučenih primjera, posebno zato što se slični zadaci pojavljuju na ispitu. Na samome kraju nastavnog pisma nalazi se primjer ispita koji će Vam poslužiti za uvježbavanje gradiva i završnu samoprovjeru znanja. Sretno!

SADRŽAJ

1. BROJEVI

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. *Što je matematička indukcija i kada je koristimo?*
2. *Kako glasi binomni poučak? Kako definiramo binomne koeficijente?*
3. *Kako uvodimo skupove brojeva?*

1.1. MATEMATIČKA INDUKCIJA

Indukcija je oblik zaključivanja kojim se od dvaju ili više pojedinačnih sudova dobiva novi opći sud.

Ovaj način zaključivanja često se koristi u prirodnim znanostima. Iako može dovesti do pogrešnih rezultata, metoda induktivnog zaključivanja moćno je i ponekad jedino sredstvo u otkrivanju istinitih činjenica. *indukcija*

Pogledajmo primjere pogrešnih induktivnih zaključivanja.

Primjer 1. Vrijednost izraza $P(n)=n^2+n+41$ je prost broj za svaki $n\in\mathbf{N}$.

Za $n=40$ dobivamo $P(40)=41^2$, a za $n=41$ dobivamo $P(41)=41^2+41+41$ što je djeljivo s 41.

Primjer 2. Broj $991n^2+1$ nije potpun kvadrat niti za jedan prirodni broj n.

Za $n=12055735790331359447442538767$ izraz je potpuni kvadrat.

Postoje također i slutnje koje su točne za velik broj specijalnih slučajeva, ali još ne znamo jesu li uvijek točne. Među najpoznatije pripada **Goldbachova slutnja**: svaki paran broj veći od 2 jednak je zbroju dvaju prostih brojeva. Formulirana je 1742. godine. Do danas je tvrdnja provjerena za velik broj prirodnih brojeva i pokazala se istinitom, međutim sama tvrdnja još nije dokazana.

Da bi induktivno zaključivanje u matematici dalo ispravne rezultate, moramo osigurati neke dodatne uvjete. Na taj način dobivamo način zaključivanja poznat kao **matematička indukcija**. Dodatne uvjete osigurat ćemo aksiomom (principom) matematičke indukcije.

Aksiom matematičke indukcije *princip matematičke indukcije*

Ako neka tvrdnja vrijedi za broj 1 i ako iz pretpostavke da vrijedi za svaki broj n slijedi da vrijedi i za svaki sljedeći broj $n+1$, tada ona vrijedi za svaki prirodni broj n.

Pojedine korake u zaključivanje matematičkom indukcijom nazivamo posebnim imenima. Neka je $T(n)$ tvrdnja koju analiziramo i koja ovisi samo o $n\in\mathbf{N}$.
Svaki dokaz matematičkom indukcijom provodi se u tri koraka:

koraci matematičke indukcije

- **Baza indukcije**: provjera istinitosti tvrdnje $T(1)$.
- **Pretpostavka indukcije**: Pretpostavimo da je tvrdnja istinita tvrdnja za

neki $n \in \mathbf{N}$.
- **Korak indukcije**: Dokaz da uz pretpostavku indukcije vrijedi i tvrdnja $T(n+1)$.

Primjer 3. Odredimo formulu za zbroj prvih n neparnih brojeva, tj. izračunajmo: $T(n)=1+3+5+\cdots+(2n-1)$ za po volji $n \in \mathbf{N}$.

Odredimo vrijednost izraza za prvih nekoliko prirodnih brojeva:

$T(1)=1=1^2$

$T(2)=1+3=4=2^2$

$T(3)=1+3+5=9=3^2$

$T(4)=1+3+5+7=16=4^2$

Tvrdnja: $T(n)=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Time smo uporabili induktivni način zaključivanja. Izraz $T(n)$ istinit je za prve četiri vrijednosti prirodnog broja n. Da bismo se uvjerili u njezinu istinitost za svaki prirodni broj n, primijenit ćemo princip matematičke indukcije.

Baza indukcije: $T(1)=1=1^2$

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da za neko $n \in \mathbf{N}$ vrijedi $T(n)$, tj.

$$T(n)=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

Korak indukcije: Tvrdimo da vrijedi: $T(n+1)=(n+1)^2$.

$T(n+1)=1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=$ po pretpostavci indukcije $=$

$=n^2+2n+1=(n+1)^2$

Zbog provjerene baze i koraka indukcije, prema aksiomu matematičke indukcije, vrijedi $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Primjer 4. Za po volji $n \in \mathbf{N}$ izračunajmo:

$$T(n)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Odredimo vrijednost izraza za prva tri prirodna broja:

$T(1)=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$

$T(2)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$

$T(n)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$

Tvrdnja: $T(n)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Tvrdnju (hipotezu) dobivenu nepotpunom indukcijom dokazujemo matematičkom indukcijom. Nepotpuna indukcija nema snagu dokaza budući da se hipoteza postavlja provjerom nekoliko pojedinačnih slučajeva.

Baza indukcije: $T(1)=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$.

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi tvrdnja:

$$T(n)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Korak indukcije: Tvrdimo da vrijedi:

$$T(n+1)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}.$$

$T(n+1)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=$ po pretpostavci indukcije $=$

$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n\cdot(n+1)+1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

Zbog provjerene baze i koraka indukcije, prema aksiomu matematičke indukcije, vrijedi $T(n)=\frac{n}{n+1}$ za svaki $n\in \mathbf{N}$.

Matematička indukcija se u nastavi matematike primjenjuje na

- **računanje konačnih suma**,
- **djeljivost**,
- **nejednakosti**.

primjena matematičke indukcije

Na prethodnim primjerima vidjeli smo primjenu matematičke indukcije na računanje konačnih suma. Napravimo to na primjeru zadatka vezanog za djeljivost.

Primjer 5. Dokažimo matematičkom indukcijom da za svaki $n\in \mathbf{N}$ vrijedi:

$$6\,|\,n^3+11n.$$

Neka je $T(n)=n^3+11n$.

Baza indukcije: $T(1)=12$, $6\,|\,12$.

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da za neki $n\in \mathbf{N}$ vrijedi: $6\,|\,n^3+11n$.

Korak indukcije: Tvrdimo $6\,|\,T(n+1)=(n+1)^3+11(n+1)$.

$$T(n+1)=(n+1)^3+11(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+11n+11=n^3+11n+3n^2+3n+12=$$
$$=n^3+11n+3n\cdot(n+1)+12$$

Po pretpostavci indukcije $6\,|\,n^3+11n$, znamo da $6\,|\,12$, a $6\,|\,3n\cdot(n+1)$ jer je $n(n+1)$ produkt dva uzastopna prirodna broja, tj. djeljiv je s 2, pa je $3n\cdot(n+1)$ djeljivo sa 6. Slijedi da $6\,|\,T(n+1)=(n+1)^3+11(n+1)$.

Zbog provjerene baze i koraka indukcije, prema aksiomu matematičke indukcije, vrijedi $6\,|\,n^3+11n$ za svaki $n\in \mathbf{N}$.

1.2. BINOMNI POUČAK

1.2.1. FAKTORIJELI

Za prirodan broj n sa $n!$ označavamo **umnožak prvih n prirodnih brojeva**:

faktorijeli

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

$n!$ čitamo „en **faktorijela**".
Prema tome je:

$$\begin{array}{lcr}
1! = 1 & = & 1 \\
2! = 1\cdot 2 & = & 2 = 2\cdot 1! \\
3! = 1\cdot 2\cdot 3 & = & 6 = 3\cdot 2! \\
4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 & = & 24 = 4\cdot 3! \\
5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 & = & 120 = 5\cdot 4! \\
6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 & = & 720 = 6\cdot 5! \\
7! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 & = & 5040 = 7\cdot 6! \\
8! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 & = & 40320 = 8\cdot 7! \\
9! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 & = & 362880 = 9\cdot 8! \\
10! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 & = & 3628800 = 10\cdot 9!
\end{array}$$

Uočimo da vrijedi rekurzivna formula:

$$n! = n\cdot(n-1)!$$

uz $0! = 1$.

Funkcija faktorijela raste vrlo brzo. Njezine vrijednosti možemo direktno očitavati na računalu samo za neke vrijednosti što ovisi o vrsti računala. Tako nam na primjer računalo daje rezultat: $253! \approx 5.173\cdot 10^{499}$.

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $$\frac{49!-48!}{47!} = \frac{49\cdot 48\cdot 47!-48\cdot 47!}{47!} = \frac{47!\cdot(49\cdot 48-48)}{47!} = 48^2 = 2304$$

b) $\frac{(n-2)!}{(n-1)!} + \frac{(n-3)!}{(n-2)!}$, za $n \geq 3$

Ako je $n = 3$, onda je $\frac{(n-2)!}{(n-1)!} + \frac{(n-3)!}{(n-2)!} = \frac{1!}{2!} + \frac{0!}{1!} = \frac{3}{2}$.

Za $n > 3$ vrijedi

$$\frac{(n-2)!}{(n-1)!} + \frac{(n-3)!}{(n-2)!} = \frac{(n-2)!}{(n-1)(n-2)!} + \frac{(n-3)!}{(n-3)(n-2)!} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} = \frac{2n-3}{(n-1)(n-2)}.$$

Primjer 2. Riješimo jednadžbe:

a) $$\frac{(2n)!}{(2n-3)!} = \frac{20\cdot n!}{(n-2)!}$$

Primijetimo da je $n \geq 2$.
Jednadžbu možemo zapisati kao

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)!}{(2n-3)!}=\frac{20\cdot n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}.$$

Dobivamo

$2n(2n-1)2\cdot(n-1)=20\cdot n(n-1)$,

odnosno

$2n-1=5$

$n=3$.

b) $\frac{n!}{(n-3)!}=\frac{8(n-1)!}{(n-2)!}$

Primijetimo da je $n\geq 3$.

Jednadžbu možemo zapisati kao $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}=\frac{8(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}$.

Dobivamo

$n(n-2)=8$,

odnosno

$n^2-2n-8=0$

iz čega je $n_1=4$ i $n_2=-2$ pa je rješenje jednadžbe $n=4$.

1.2.2. BINOMNI KOEFICIJENTI

binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj, a k prirodan broj ili 0 i $k\leq n$. **Binomni koeficijent** označavamo simbolom $\binom{n}{k}$ i definiramo: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Za $k=0$ dobivamo:

$$\binom{n}{0}=1.$$

Primijetimo da je:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Osnovna **svojstva binomnih koeficijenata**:

1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, $k=0,1,2,\ldots,n$
2. $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$, $k=1,2,\ldots,n$

Svojstva dokazujemo direktnim raspisivanjem lijeve i desne strane nakon čega ustanovimo da vrijedi jednakost.

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

b) $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{0!} = 1$

c) $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-(n-1)} = \binom{n}{1} = n$

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $\binom{8}{6} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$

b) $\binom{15}{13} = \binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} = 105$

c) $\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$

d) $\binom{14}{12} + \binom{14}{11} = \binom{15}{12} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$.

Primjer 3. Riješimo jednadžbe:

a) $2\binom{n}{4} = \binom{n+1}{4}$

Jednadžbu možemo zapisati u obliku

$2 \cdot \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{(n+1)!}{4!(n+1-4)!}$ (primijetimo da je $n \geq 4$),

iz čega slijedi

$2 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}$.

Dobivamo $2(n-3) = n+1$, odnosno $n = 7$.

b) $\binom{n}{3} + \binom{n}{2} = 15(n-1)$

Jednadžbu možemo zapisati u obliku

$\frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 15(n-1)$ (primijetimo da je $n \geq 3$),

Iz čega slijedi

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6(n-3)!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 15(n-1)$

Dobivamo $n(n-2) + 3n = 90$,

odnosno $n^2 + n - 90 = 0$

iz čega slijedi $n_1 = 9$ i $n_2 = -10$ pa je rješenje jednadžbe $n = 9$.

1.2.3. BINOMNI POUČAK

Binomni koeficijenti su definirani kao broj načina da od n objekata izaberemo njih k. Lako se čitaju iz **Pascalovog trokuta**.

Pascalov trokut

Zapišimo koeficijente koji se pojavljuju pri računanju $(a+b)^n$ za:

$$\begin{array}{lccccccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
n=1 & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
n=2 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
n=3 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
n=4 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
n=5 & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
n=6 & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
n=7 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
n=8 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}$$

Dobivena shema brojeva naziva se Pascalov trokut prema matematičaru koji je povezao koeficijente trokuta s binomnim koeficijentima:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=1 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
n=2 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
n=3 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
n=4 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Matematičkom indukcijom može se dokazati da vrijedi **binomna formula** (poučak):

binomna formula

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Ili kraće

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,\ n\in \mathbf{N}$$

pri čemu član $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ nazivamo **općim članom binomnog razvoja**.

opći član binomnog razvoja

Primjer 1. Primjenom binomne formule prikažimo:

a) $(x+3)^5 = \binom{5}{0}x^5\cdot 3^0 + \binom{5}{1}x^4\cdot 3^1 + \binom{5}{2}x^3\cdot 3^2 + \binom{5}{3}x^2\cdot 3^3 + \binom{5}{4}x^1\cdot 3^4 + \binom{5}{5}x^0\cdot 3^5 =$

$= x^5 + 5\cdot 3x^4 + 10\cdot 9x^3 + 10\cdot 27x^2 + 5\cdot 81x + 243 =$

$$= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$$

b) $$(x-y)^4 = \binom{4}{0}x^4(-y)^0 + \binom{4}{1}x^3(-y)^1 + \binom{4}{2}x^2(-y)^2 + \binom{4}{3}x^1(-y)^3 + \binom{4}{4}x^0(-y)^4 =$$
$$= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

Primjer 2. Odredimo 17. član u razvoju binoma $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{20}$.

17. član u razvoju binoma dobivamo za $k = 16$. Formula općeg člana binomnog razvoja daje nam:

$$\binom{20}{16}\left(x^2\right)^{20-16}\left(-\frac{1}{x}\right)^{16} = \binom{20}{4}x^8 \cdot \frac{1}{x^{16}} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^{-8} = \frac{4845}{x^8}.$$

Primjer 3. Odredimo koeficijent uz a^6b^6 u $\left(a^2 + b^3\right)^5$.

Opći član u binomnom razvoju ima oblik $\binom{5}{k}\left(a^2\right)^{5-k}\left(b^3\right)^k$. Iz $\left(a^2\right)^{5-k}\left(b^3\right)^k = a^6b^6$

dobivamo da je $k = 2$. Traženi koeficijent je $\binom{5}{2} = 10$.

Primjer 4. Koji član u razvoju binoma $\left(\frac{1}{a^2} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{22}$ ne sadrži a?

Opći član u binomnom razvoju ima prikaz:

$$\binom{22}{k}\left(\frac{1}{a^2}\right)^{22-k}\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^k = \binom{22}{k}a^{-44+2k+\frac{3}{4}k}.$$

Želimo odrediti takav k da se u članu binomnog razvoja pojavi a^0. Slijedi:

$$-44 + 2k + \frac{3}{4}k = 0$$

pa je $k = 16$, odnosno riječ je o sedamnaestom članu.

1.3. SKUPOVI BROJEVA

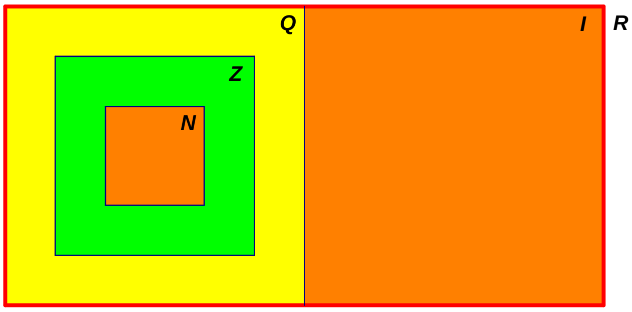
1.3.1. SKUP REALNIH BROJEVA

Uvedemo li oznake:

N … skup prirodnih brojeva
Z … skup cijelih brojeva
Q … skup racionalnih brojeva
I … skup iracionalnih brojeva
R … skup realnih brojeva

skupovi brojeva

vrijede skupovni odnosi: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ i $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$ i $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$.



1.3.2. SKUP KOMPLEKSNIH BROJEVA

Ponovimo najprije što smo u skupu kompleksnih brojeva naučili u drugom razredu.
Jednadžba $x^2 = -1$ u skupu realnih brojeva nema rješenja. Naime, ne postoji realni broj x sa svojstvom da je njegov kvadrat jednak -1. Za svaki realan broj x vrijedi da je $x^2 \geq 1$. Nameće se potreba da skup realnih brojeva proširimo tako da jednadžba $x^2 = -1$, i njoj slične jednadžbe u proširenom skupu imaju rješenja.

Da bismo proširili skup realnih brojeva, potrebno je riješiti jednadžbu $x^2 = -1$. U tu svrhu ćemo broj čiji je kvadrat jednak -1 označiti s i, tj.

$$i^2 = -1.$$

Broj označen s $i = \sqrt{-1}$ naziva se **imaginarna jedinica**.

Brojeve oblika yi, gdje je y realni broj, a i imaginarna jedinica nazivamo **imaginarnim brojevima**.

Kako je skup kompleksnih brojeva proširenje skupa realnih brojeva, on mora sadržavati realne brojeve. Želimo li da računske operacije naslijede svojstva računskih operacija u skupu realnih brojeva, dolazimo do oblika kompleksnog broja koji će ispunjavati navedene zahtjeve.

Kompleksan broj je broj oblika $z = x + yi$, gdje su x i y realni brojevi.
Oblik $x + yi$ nazivamo **standardni** ili **algebarski oblik kompleksnog broja**.

U kompleksnom broju $z = x + yi$ realni broj x je njegov **realni dio**, a realni broj y njegov **imaginarni dio**. Oznake:

$$x = \mathrm{Re}(z)$$
$$y = \mathrm{Im}(z).$$

Skup kompleksnih brojeva označavamo slovom $\mathbf{C}$.

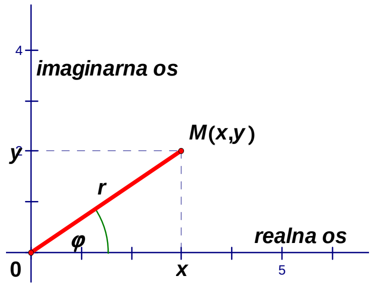
1.3.2.1. TRIGONOMETRIJSKI PRIKAZ KOMPLEKSNOG BROJA

Svakom kompleksnom broju $z = x + yi$ možemo pridružiti uređen par (x, y), odnosno točku $M(x, y)$ u ravnini. Vrijedi i obrnuto, svakoj točki ravnine možemo pridružiti jedan kompleksan broj.

Na taj način definirano pridruživanje daje mogućnost proučavanja kompleksnih brojeva kao točaka **kompleksne** ili **Gaussove ravnine**.

Na apscisi su smješteni svi realni brojevi pa je nazivamo realna os, a na ordinati svi imaginarni brojevi pa je nazivamo imaginarna os.

Neka je kompleksni broj $z = x + yi$, $z \neq 0$ prikazan u kompleksnoj ravnini točkom $M(x, y)$. Označimo sa r **udaljenost točke M od ishodišta kompleksne ravnine**, a sa φ **kut što ga zatvaraju pozitivni dio realne osi i polupravac točkom M s početkom u ishodištu**.



Za koordinate točke M vrijedi:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r \geq 0$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

Tada kompleksni broj z $(z \neq 0)$ možemo zapisati kao:

$$z = x + yi = r\cos\varphi + ri\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Zapis

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

nazivamo **trigonometrijski zapis kompleksnog broja**, pri čemu je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ **modul kompleksnog broja** (oznaka $|z| = r$), a kut φ **argument kompleksnog broja** za koji vrijedi $0 \leq \varphi < 2\pi$ (oznaka $\varphi = \arg z$).

trigonome-trijski prikaz kompleksnog broja

Primjer 1. Odredimo modul i argument kompleksnog broja z:

a) $z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $r = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$

b) $z = \cos\pi + i\sin\pi$, $r = 1$, $\varphi = \pi$

c) $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $r = \sqrt{3}$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$

Primjer 2. Odredimo trigonometrijski prikaz kompleksnog broja z:

a) Broju $z=\sqrt{3}+i$ pridružena točka $M\left(\sqrt{3},1\right)$ nalazi se u I. kvadrantu.

$r=|z|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$ i $tg\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\Rightarrow\quad\varphi=\frac{\pi}{6}$.

Trigonometrijski prikaz broja z ima oblik $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

b) Broju $z=-1-i$ pridružena točka $M(-1,-1)$ nalazi se u III. kvadrantu.

$r=|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ i $tg\varphi=\frac{-1}{-1}=1\quad\Rightarrow\quad\varphi=\frac{5\pi}{4}$.

Trigonometrijski prikaz broja z ima oblik $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

c) Broju $z=-3i$ pridružena je točka $M(0,-3)$.

$r=|z|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=3$ i $tg\varphi=\frac{-3}{0}=\pm\infty\quad\Rightarrow\quad\varphi=\frac{3\pi}{2}$.

Trigonometrijski prikaz broja z ima oblik $z=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

d) Broju $z=1$ pridružena je točka $M(1,0)$.

$r=|z|=\sqrt{1^2+0^2}=1$ i $tg\varphi=\frac{0}{1}=0\quad\Rightarrow\quad\varphi=0$.

Trigonometrijski prikaz broja z ima oblik $z=\cos 0+i\sin 0$.

e) Broju $z=1+i^{123}=1+i^3=1-i$ pridružena točka $M(1,-1)$ nalazi se u IV. kvadrantu.

$r=|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ i $tg\varphi=\frac{-1}{1}=-1\quad\Rightarrow\quad\varphi=\frac{7\pi}{4}$.

Trigonometrijski prikaz broja z ima oblik $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

Primjer 3. Zadane brojeve zapišimo u trigonometrijskom obliku:

a) $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)$

Budući je $r\geq 0$ najprije imamo $z=3\left(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)$.

Tražimo kut φ takav da je $\cos\varphi=-\cos\frac{\pi}{7}$ i $\sin\varphi=\sin\frac{\pi}{7}$, odnosno kut u II. kvadrantu: $\varphi=\pi-\frac{\pi}{7}=\frac{6\pi}{7}$, pa je trigonometrijski prikaz zadanog broja $z=3\left(\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$.

b) $z=-2\cos\frac{\pi}{8}-2\sin\frac{\pi}{8}$

Budući je $r\geq 0$ najprije imamo $z=2\left(-\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)$.

Tražimo kut φ takav da je $\cos\varphi=-\cos\frac{\pi}{8}$ i $\sin\varphi=-\sin\frac{\pi}{8}$, odnosno kut u III. kvadrantu: $\varphi=\pi+\frac{\pi}{8}=\frac{9\pi}{8}$, pa je trigonometrijski prikaz zadanog broja $z=2\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$.

1.3.2.2. MNOŽENJE I DIJELJENJE KOMPLEKSNIH BROJEVA

Trigonometrijski prikaz kompleksnih brojeva pokazuje se vrlo praktičan pri množenju i dijeljenju kompleksnih brojeva.

Neka su $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ i $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Tada je

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

množenje kompleksnih brojeva

Kompleksne brojeve prikazane u trigonometrijskom obliku množimo tako da im pomnožimo module, a argumente zbrojimo:

$$|z_1\cdot z_2|=r_1\cdot r_2,$$
$$\arg(z_1\cdot z_2)=\varphi_1+\varphi_2.$$

Ako je $\varphi=\varphi_1+\varphi_2>2\pi$, onda za argument uzimamo $\varphi_1+\varphi_2-2\pi$.

Primjer 1. Pomnožimo kompleksne brojeve:

a) $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ i $z_2=\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

$$z_1\cdot z_2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\right)=4\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

b) $z_1=-1-i\sqrt{3}$ i $z_2=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

Zapišimo najprije broj z_1 u trigonometrijskom obliku:

$z_1=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$. Sada je:

$$z_1\cdot z_2=2\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{11\pi}{6}\right)\right)=\cos\frac{19\pi}{6}+i\sin\frac{19\pi}{6}=$$
$$=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$$

Neka su $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Tada je

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

dijeljenje kompleksnih brojeva

Kompleksne brojeve prikazane u trigonometrijskom obliku dijelimo tako da im podijelimo module, a argumente oduzmemo:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2},$$

Ako je $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 < 2\pi$, onda za argument uzimamo $\varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi$.

Primjer 2. Podijelimo kompleksne brojeve:

a) $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ i $z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}}{1}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

b) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ i $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Zapišimo najprije broj z_2 u trigonometrijskom obliku:

$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$. Sada je:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{-5\pi}{12} + i\sin\frac{-5\pi}{12}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

1.3.2.3. POTENCIRANJE KOMPLEKSNIH BROJEVA

Kao neposredna posljedica množenja kompleksnih brojeva zapisanih u trigonometrijskom obliku slijedi:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Formulu za **potenciranje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku** nazivamo Moivreova formula za potenciranje kompleksnih brojeva.

potenciranje kompleksnih brojeva

Iz dobivenog rezultata čitamo:

$$|z^n| = r^n,$$

$$\arg(z^n) = n\varphi, \quad 0 \le n\varphi < 2\pi$$

Primjer Izračunajmo:

a) z^{101} ako je $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

Trigonometrijski prikaz broja kojeg potenciramo je: $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$.

Sada je:

$$z^{101}=1^{101}\left(\cos 101\cdot\frac{\pi}{6}+i\sin 101\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{101\pi}{6}+i\sin\frac{101\pi}{6}=$$
$$=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$$

b) z^{-10} ako je $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Trigonometrijski prikaz broja kojeg potenciramo je: $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

Sada je:

$$z^{-10}=1^{-10}\left(\cos(-10)\cdot\frac{\pi}{3}+i\sin(-10)\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{-10\pi}{3}+i\sin\frac{-10\pi}{3}=$$
$$=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$$

1.3.2.4. KORJENOVANJE KOMPLEKSNIH BROJEVA

Za izračunavanje korijena kompleksnog broja koristimo Moivreovu formulu za **korjenovanje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku**:

korjenovanje kompleksnih brojeva

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,2,\ldots,n-1$$

n-ti korijen kompleksnog broja ima n različitih vrijednosti. Tih n kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini su vrhovi pravilnog n-terokuta kojemu je opisana kružnica polumjera duljine $\sqrt[n]{r}$.

Primjer Izračunajmo:

a) $\sqrt[6]{-64}$

Neka je $z=-64$. Zapišimo broj z u trigonometrijskom obliku:

$z=64(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Prema Moivreovoj formuli imamo:

$$\sqrt[6]{-64}=\sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right),\quad k=0,1,2,3,4,5.$$

$$k=0:\quad z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i\,,$$

$$k=1:\quad z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i\,,$$

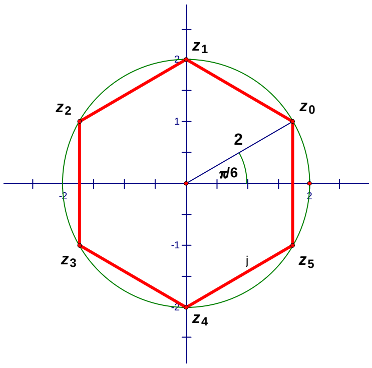
$$k=2:\quad z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}+i\,,$$

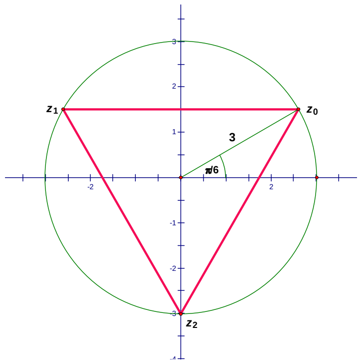
$$k=3:\quad z_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}-i\,,$$

$$k=4:\quad z_4=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-2i\,,$$

$$k=5:\quad z_5=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-i\,.$$

Uočimo da dobiveni kompleksni brojevi imaju isti modul, tj. jednako su udaljeni od ishodišta. To znači da se u kompleksnoj ravnini nalaze na kružnici sa središtem u ishodištu i polumjera 2 (slika lijevo):





b) $\sqrt[3]{27i}$

Neka je $z=27i$. Zapišimo broj z u trigonometrijskom obliku:

$$z=27\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Prema Moivreovoj formuli imamo:

$$\sqrt[3]{27i}=\sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2\,.$$

$$k=0:\quad z_0=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\,,$$

$$k=1:\quad z_1=3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\,,$$

$$k=2:\quad z_2=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-3i\,.$$

Dobiveni kompleksni brojevi se u kompleksnoj ravnini nalaze na kružnici sa središtem u ishodištu i polumjera 3 (slika gore desno).

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Matematičkom indukcijom dokažite za svaki prirodan broj:
   a) $2+4+6+8+\cdots+2n=n(n+1)$,
   b) $-1+3+7+\cdots+(4n-5)=n\cdot(2n-3)$,
   c) $2+6+18+\cdots+2\cdot 3^{n-1}=3^n-1$,
   d) $5+8+11+\cdots+(3n+2)=\frac{1}{2}n\cdot(3n+7)$,
   e) $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2\cdot(2n^2-1)$,
   f) $2^2+6^2+10^2+\cdots+(4n-2)^2=\frac{4}{3}n\cdot(4n^2-1)$.

2. Riješite jednadžbe:

a) $\frac{n!}{(n-4)!}=\frac{2n!}{(n-2)!}$,

b) $\frac{(n+2)!}{n!}=72$,

c) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=30$,

d) $5\binom{n}{n-3}=\binom{n+2}{n-2}$,

e) $5!\binom{n}{5}=336\binom{n-2}{n-5}$,

f) $\binom{n}{3}=\frac{4}{15}\cdot\binom{n+2}{n-2}$.

3. Prikažite pomoću binomne formule:
   a) $(x^4+2x^3)^7=$
   b) $(x^5-3x^2)^6=$
   c) $(3+3i)^4=$
   d) $(1-i)^5=$

4. Odredite 20. član u razvoju binoma $\left(\frac{3}{x^2}+x^5\right)^{23}$.

5. Odredite 18. član u razvoju binoma $\left(\frac{2}{x^8}-x^{-7}\right)^{25}$.

6. Koji član u razvoju binoma $\left(\sqrt{a^3}+\sqrt[3]{a^2}\right)^{12}$ sadrži a^{13}?

7. Koji član u razvoju binoma $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{6}$ ne sadrži a?

8. Kompleksne brojeve napišite u trigonometrijskom obliku:

a) $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, b) $z_1=\sqrt{3}+i$, c) $z=-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$, d) $z=11i^{81}$.

9. Izračunajte:

a) $\frac{z_1}{z_2}$ ako je $z_1=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ i $z_2=1-i\sqrt{3}$,

b) $z_1\cdot z_2$ ako je $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ i $z_2=\frac{1}{10}\left(\cos\frac{13\pi}{6}+i\sin\frac{13\pi}{6}\right)$,

c) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{-12} =$

d) $\overline{z_1} \cdot z_2^{15}$ ako je $z_1 = 2\sqrt{3}-2i$ i $z_2 = -16$,

e) $\sqrt[6]{1-i}$.

2. NIZOVI

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. *Što je niz? Gdje nizove susrećemo u svakodnevnom životu? Za koji niz kažemo da je aritmetički? Za koji niz kažemo da je geometrijski?*
2. *Što je granična vrijednost ili limes niza i kako ga računamo?*
3. *Što je red? Koji je primjer reda u svakodnevnom životu?*

2.1. POJAM NIZA. ZADAVANJE NIZA

U svakodnevnom govoru pod pojmom niza podrazumijevamo poredanu skupinu bilo kakvih objekata (biseri u ogrlici, kuće označene i poredane po brojevima i sl.)

Niz u skupu S je svaka funkcija $a:\mathbf{N}\to S$ koja prirodnom broju n pridružuje element a_n skupa S, tj. $a(n)=a_n$. ***niz***

Oznake: (a_n) … oznaka niza

a_n … opći član niza

Ako je $S\subset\mathbf{R}$, onda govorimo o nizu u skupu $\mathbf{R}$ ili nizu realnih brojeva.

Primjer 1.

a) Niz prirodnih brojeva: $a:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $a(n)=n$, $a_n=n$.

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=4$, …

b) Niz parnih prirodnih brojeva: $a:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $a(n)=2n$, $a_n=2n$.

$a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=6$, $a_4=8$, …

c) Niz neparnih prirodnih brojeva: $a:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $a(n)=2n-1$, $a_n=2n-1$.

$a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=5$, $a_4=7$, …

Primjer 2. Za napisana prva tri člana niza pokušajte odrediti barem dva logična nastavka niza (kao u testu domišljatosti):

a) 1, 2, 4, …
b) 1, 1, 2, …
c) 1, 0, 1, …

Uočavamo da se niz bez općeg člana može nastaviti na bilo koji način. S prvih nekoliko članova niza niz nije jednoznačno određen. O njegovom općem članu možemo samo više ili manje logično nagađati.

Načini zadavanja niza:

1. Niz je određen ako mu je zadan **opći član**.
2. Niz možemo zadati pomoću **rekurzivnih formula** u kojima se članovi niza zadaju pomoću već prije definiranih članova niza. Zavisno od rekurzivne formule, ponekad je potrebno zadati više od jednog početnog člana niza.

načini zadavanja niza

Primjer 3. Odredimo nekoliko prvih članova niza zadanih općim članom:

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

$a_1 = \frac{2}{3}$, $a_2 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{4}{5}$, $a_4 = \frac{5}{6}$, …

b) $a_n = 2^{-n}$

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{8}$, $a_4 = \frac{1}{16}$, …

c) $a_n = 2^{-n}$

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{8}$, $a_4 = \frac{1}{16}$, …

d) $a_n = \left\lfloor \sqrt{n^2+n} \right\rfloor$

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, …

Primjer 4. Napišimo prvi, peti, trinaesti i trideset i drugi član niza zadanog općim članom $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_5 = \frac{5}{6},\ a_{13} = \frac{13}{14},\ a_{32} = \frac{32}{33}.$$

Primjer 5. Odredimo prvih pet članova niza zadanog rekurzivnom formulom:

a) $a_n = a_{n-1} + n$, $a_1 = 1$

$a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10$, $a_5 = 15$

b) $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

$a_3 = \sqrt{2}$, $a_4 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8}$, $a_5 = \sqrt[8]{32}$

c) $a_n = a_{n-1}{}^2 - n \cdot a_{n-2}$, $a_1 = a_2 = 1$, $n \geq 3$

$a_3 = -2$, $a_4 = 0$, $a_5 = 10$.

Primjer 6. **Fibonaccijev niz**

Neka je $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$. Napišimo prvih 13 članova ovog niza:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89.

Daniel Bernoulli je početkom 18. stoljeća našao formulu za opći član Fibonaccijevog niza:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Lako je pokazati da je omjer člana Fibonaccijevog niza i njegovog prethodnika jednak 1.618… što je točno **omjer zlatnog reza**. Upravo zbog toga Fibonaccijev niz susrećemo u velikom broju primjera iz svakodnevnog života.

Postoje i nizovi za koje ne znamo formulu općeg člana niti rekurzivnu ralaciju između članova niza. Takve nizove možemo zadati opisom.

Primjer 7. Neka je a_n n-ta znamenka decimalnog prikaza broja $\pi \approx 3.1415928\ldots$ Tada je $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$, … Niz je potpuno određen, a po potrebi jednim od poznatih algoritama možemo izračunati velik broj članova ovog niza. Tako je npr. $a_{101} = 8$.

2.2. ARITMETIČKI NIZ

Niz je **aritmetički** ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1} = a_n + d\ .$$

Broj d naziva se **diferencija (razlika) aritmetičkog niza** (a-niza).

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Aritmetički niz jednoznačno je određen ako znamo njegov prvi član a_1 i razliku niza d.

Ako je $d > 0$, niz je rastući, tj. $a_{n+1} > a_n$.
Ako je $d < 0$, niz je padajući, tj. $a_{n+1} < a_n$.
Ako je $d = 0$, onda je niz konstantan, tj. $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \ldots$

Zašto naziv niza: aritmetički niz?

Kako je $a_n - a_{n-1} = d$ i $a_{n+1} - a_n = d$ to je $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$ što daje

Fibonaccijev niz

aritmetički niz

razlika aritmetičkog niza

naziv niza

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je **aritmetičkoj sredini** dvaju susjednih članova (prethodnika i sljedbenika).

Izvedimo formulu općeg člana aritmetičkog niza:

$$\begin{aligned}
&a_1\\
&a_2 = a_1 + d\\
&a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d\\
&a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d\\
&a_5 = a_4 + d = a_1 + 4d\\
&\quad\vdots\\
&a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d
\end{aligned}$$

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

opći član aritmetičkog niza

Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.

Primjer 1. Odredimo dvadeseti član aritmetičkog niza 5, 9, 13, 17, …

Prvi član niza je $a_1 = 5$, a razlika niza $d = 9 - 5 = 4$ pa je:
$a_{20} = a_1 + 19d = 5 + 19 \cdot 4 = 81$.

Primjer 2. Peti član aritmetičkog niza je 19, a deseti član 39. Odredimo prvi član i razliku niza.

Zapišimo peti i deseti član u obliku $a_n = a_1 + (n-1)d$, tj. $a_5 = a_1 + 4d = 19$, $a_{10} = a_1 + 9d = 39$. Odredimo rješenje sustava:

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 19 \\ a_1 + 9d = 39 \end{cases}.$$

Dobivamo $a_1 = 3$ i $d = 4$ pa je traženi niz 3, 7, 11, …

Primjer 3. Odredimo aritmetički niz ako je: $\begin{matrix} a_1 + a_5 = 24 \\ a_2 \cdot a_3 = 60 \end{matrix}$.

Zapišemo li dane članove aritmetičkog niza u obliku $a_n = a_1 + (n-1)d$, dobivamo sustav:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = 24 \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 60 \end{cases},$$

čije je rješenje $a_1 = -2$ i $d = 7$ pa je traženi niz – 2, 5, 12, …

Odredimo sada **formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza**.

suma prvih n članova aritmetičkog niza

Neka je zadan aritmetički niz a_1, a_2, a_3, …, a_n, a_{n+1}, … . Označimo sa S_n zbroj prvih n članova niza. Tada je:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n ,$$

ali i

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 ,$$

odnosno

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \ldots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d),$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + \ldots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d).$$

zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

te je

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Kako za opći član aritmetičkog niza vrijedi formula $a_n = a_1 + (n-1)d$ zbroj prvih n članova aritmetičkog niza možemo računati po formuli:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d].$$

Primjer 4. Koliko članova aritmetičkog niza – 9, – 6, – 3, … treba zbrojiti da zbroj bude 66?

Radi se o nizu kod kojeg je prvi član $a_1 = -9$, razlika niza $d = 3$ i zbroj prvih n članova niza $S_n = 66$.

Kako je $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ treba odrediti n iz jednadžbe:

$$\frac{n}{2}[-18 + (n-1)\cdot 3] = 66 ,$$

tj.

$$n^2 - 7n - 44 = 0 .$$

Rješenja jednadžbe su $n_1 = 11$, $n_2 = -4$. Broj članova niza je pozitivan broj, dakle treba zbrojiti 11 članova niza da se dobije zbroj 66.

Primjer 5. Razlika aritmetičkog niza s konačnim brojem članova je 2, a zbroj njegovih članova iznosi 28. Prvi član niza jednak je broju članova niza. Koji je to niz?

Riječ je o nizu za koji je $d = 2$, $S_n = 28$ i $a_1 = n$. Kako je $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ i $a_n = a_1 + (n-1)d = n + (n-1)\cdot 2 = 3n - 2$, dobivamo jednadžbu:

$$\frac{n}{2}(n + 3n - 2) = 28 ,$$

tj.

$$2n^2 - n - 28 = 0$$

Rješenja jednadžbe su $n_1 = 4$, $n_2 = -\frac{7}{2}$. Broj članova niza je pozitivan broj, dakle riječ je o nizu čiji je prvi član $a_1 = 4$ i razlika $d = 2$, tj. o nizu 4, 6, 8, …

Želimo sada između dva zadana člana a i b nekog niza **interpolirati (umetnuti) *r* članova (brojeva)** tako da dobiveni niz bude aritmetički niz čiji je prvi član a, a posljednji član b, tj.

interpolacija

$$a,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_r,\ b$$

Za dobiveni niz vrijedi: $a_1 = a$, $a_n = b$ i $n = r + 2$. Odredimo razliku δ dobivenog niza:

$$a_n = a_1 + (n-1)\delta \ \Rightarrow\ b = a + (r + 2 - 1)\delta \ \Rightarrow\ \delta = \frac{b-a}{r+1}.$$

Primjer 6. Između brojeva 7 i 35 treba umetnuti šest brojeva koji će sa zadana dva činiti osam uzastopnih članova aritmetičkog niza.

Za traženi niz vrijedi $a = 7$, $b = 35$ i $r = 6$ pa je razlika tog niza $\delta = \frac{b-a}{r+1} = \frac{35-7}{6+1} = 4$, odnosno traženi niz je 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35.

2.3. GEOMETRIJSKI NIZ

Niz je **geometrijski** ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

geometrijski niz

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,\quad n \geq 1.$$

Broj q naziva se **kvocijent (količnik) geometrijskog niza** (g-niza).

kvocijent geometrijskog niza

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Geometrijski niz jednoznačno je određen ako znamo njegov prvi član a_1 i kvocijent niza q.

Zašto naziv niza: geometrijski niz?

naziv niza

Kako je $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ i $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ to je $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, odnosno

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$

Svaki član geometrijskog niza (osim prvog) jednak je **geometrijskoj sredini** dvaju susjednih članova (prethodnika i sljedbenika).

Primjer 1.

a) Niz brojeva 3, 6, 12, 24, 48, … je geometrijski niz. Prvi član niza je $a_1 = 3$, a kvocijent niza $q = \frac{6}{3} = 2$.

b) Niz brojeva – 2, – 6, – 18, – 54, – 162, … je geometrijski niz. Prvi član niza je $a_1 = -2$, a kvocijent niza $q = \frac{-6}{-2} = 3$.

c) Niz brojeva 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, … je geometrijski niz. Prvi član niza je $a_1 = 1$, a kvocijent niza $q = -\frac{1}{2}$.

Niz brojeva u kojemu su članovi s neparnim indeksima pozitivni brojevi, a članovi s parnim indeksima negativni brojevi ili obrnuto nazivamo alternirajućim nizom.

d) Ako je $q = 1$, onda geometrijski niz prelazi u niz a_1, a_1, a_1, a_1, … Za takav niz kažemo da je konstantan niz.

Izvedimo formulu općeg člana geometrijskog niza:

$$\begin{aligned}
&a_1\\
&a_2 = a_1 \cdot q\\
&a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2\\
&a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3\\
&a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^4\\
&\quad\vdots\\
&a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}
\end{aligned}$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

opći član geometrijskog niza

Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.

Primjer 1.

a) Odredimo četvrti član geometrijskog niza kojemu je prvi član niza $a_1 = -6$ i kvocijent $q = -\frac{1}{2}$.

Primjenom formule za opći član geometrijskog niza dobivamo:

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = -6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4}.$$

b) Odredimo petnaesti član geometrijskog niza kojemu je prvi član niza $a_1 = 64$ i kvocijent $q = \frac{1}{2}$.

Primjenom formule za opći član geometrijskog niza dobivamo:

$$a_{15} = a_1 \cdot q^{14} = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14} = 2^6 \cdot 2^{-14} = 2^{-8} = \frac{1}{256}.$$

Primjer 2. Odredimo geometrijski niz čiji je drugi član 24, a peti 81.

Zapišimo drugi i peti član u obliku $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, tj. $a_2 = a_1 \cdot q = 24$, $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 81$. Odredimo rješenje sustava:

$$\begin{cases} a_1 \cdot q = 24 \\ a_1 \cdot q^4 = 81 \end{cases}.$$

Izrazimo li iz prve jednadžbe sustava a_1 dobivamo $a_1 = \frac{24}{q}$ što uvršteno u drugu jednadžbu daje $\frac{24}{q} \cdot q^4 = 81$, odnosno $q^3 = \frac{27}{8}$. Slijedi da je $q = \frac{3}{2}$ i $a_1 = \frac{24}{\frac{3}{2}} = 16$.

Traženi geometrijski niz je 16, 24, 36, …

Primjer 3. Odredimo geometrijski niz ako je: $\begin{matrix} a_4 - a_6 = 756 \\ a_4 - a_5 = 432 \end{matrix}$.

Zapišemo li dane članove aritmetičkog niza u obliku $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, dobivamo sustav:

$$\begin{cases} a_1 q^3 - a_1 q^5 = 756 \\ a_1 q^3 - a_1 q^4 = 432 \end{cases},$$

odnosno

$$\begin{cases} a_1 q^3 (1 - q^2) = 756 \\ a_1 q^3 (1 - q) = 432 \end{cases}.$$

Iz druge jednadžbe dobivamo $a_1 q^3 = \frac{432}{1-q}$ što uvršteno u prvu jednadžbu daje

$$\frac{432}{1-q} \cdot (1-q)(1+q) = 756$$

čije je rješenje $q = \frac{3}{4}$. Dalje dobivamo $a_1 = 1024$ čime je jednoznačno određen geometrijski niz.

Odredimo sada **formulu za zbroj prvih *n* članova geometrijskog niza**.

zbroj prvih n članova geometrijskog niza

Neka je zadan geometrijski niz a_1, a_2, a_3, …, a_n, … . Označimo sa S_n zbroj prvih n članova niza. Tada je:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

odnosno

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Množenjem izraza za S_n sa q i oduzimanjem od S_n dobivamo:

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^n$$

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot q^n,$$

odnosno

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n),$$

te je

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Kako za opći član geometrijskog niza vrijedi formula $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ zbroj prvih n članova geometrijskog niza možemo računati po formuli:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}.$$

Primjer 4. Koliko članova geometrijskog niza $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ treba zbrojiti da zbroj bude $\frac{85}{64}$?

Radi se o nizu kod kojeg je prvi član $a_1 = 2$, kvocijent niza $q = -\frac{1}{2}$ i zbroj prvih n članova niza $S_n = \frac{85}{64}$. Tada je

$$S_n = 2 \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3} \cdot \left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{85}{64},$$

odnosno

$$1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{255}{256},$$

iz čega slijedi

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{256} \text{ i } n = 8.$$

Zbroj prvih 8 članova geometrijskog niza jednak je $\frac{85}{64}$.

Primjer 5. U geometrijskom nizu odredimo n i q ako je $a_1 = 3$, $a_n = 96$ i $S_n = 189$.

Primijenimo li formulu za zbroj prvih n članova geometrijskog niza $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$ dobivamo $189 = \frac{3-96q}{1-q}$ iz čega slijedi da je $q = 2$.

Iz formule za opći član geometrijskog niza $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ dobivamo $96 = 3 \cdot 2^{n-1}$, odnosno $2^{n-1} = 32$ iz čega je $n = 6$.

Želimo sada između dva zadana člana a i b nekog niza ***interpolirati (umetnuti) r članova (brojeva)*** tako da dobiveni niz bude geometrijski niz čiji je prvi član a, a posljednji član b, tj.

$$a,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_r,\ b$$

Za dobiveni niz vrijedi: $a_1 = a$, $a_n = b$ i $n = r+2$. Odredimo kvocijent ρ dobivenog niza:

$$b = a\cdot q^{r+2-1} = a\cdot \rho^{r+1} \quad\Rightarrow\quad \rho^{r+1} = \frac{b}{a} \quad\Rightarrow\quad \rho = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}\ .$$

interpolacija

Primjer 6. Između brojeva 3 i 19683 treba umetnuti sedam brojeva koji će sa zadana dva činiti devet uzastopnih članova geometrijskog niza.

Za traženi niz vrijedi $a=3$, $b=19683$ i $r=7$ pa je kvocijent tog niza $\rho = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[8]{\frac{19683}{3}} = \sqrt[8]{6561} = 3$, odnosno traženi niz je 3, 9, 27, ...

2.4. LIMES NIZA. TEOREMI O LIMESIMA

2.4.1. LIMES ILI GRANIČNA VRIJEDNOST NIZA

Primjer 1. Što se događa s članovima niza (a_n) zadanog općim članom za velike vrijednosti broja n?

a) $a_n = \dfrac{1}{10^n}$

Napišimo prvih nekoliko članova zadanog niza: $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.01$, $a_3 = 0.001$, $a_4 = 0.0001$, … Uočimo da članovi niza teže prema nuli.

b) $a_n = \dfrac{n-1}{n}$

Napišimo prvih nekoliko članova zadanog niza: $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{3}{4}$, …, $a_{10} = \frac{9}{10}$. Uočimo da članovi niza teže prema broju 1.

Za niz (a_n) realnih brojeva kažemo da je **konvergentan** ako postoji realan broj a takav da niz (a_n) teži broju a kada n neograničeno raste. Tada kažemo da je a **limes** ili **granična vrijednost niza** i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Za niz koji nije konvergentan kažemo da je **divergentan**.

konvergentan niz

limes niza

divergenta niz

Važno: Konvergentan niz ima samo jedan limes.

Primjer 2.

a) Niz zadan općim članom $a_n = 1 - \frac{1}{10^n}$.

Napišimo prvih nekoliko članova zadanog niza: $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{9}{10}$,

$a_3 = \frac{99}{100}$, $a_4 = \frac{999}{1000}$, ... Članovi niza teže k broju 1, niz je konvergentan.

Limes zadanog niza je 1, tj. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 1$.

b) Niz – 2, 2, – 2, 2, – 2, … zadan općim članom $a_n = (-1)^n \cdot 2$ ima dvije točke gomilanja. Niz je divergentan. Niz nema limes.

c) Niz 1, 2, 3, 4, 5, … zadan općim članom $a_n = n$ neograničeno raste, ali po dogovoru pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Kažemo da niz teži u beskonačno.

Kažemo da je niz (a_n) **nul-niz** ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

nul-niz

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (niz (a_n) neograničeno raste), onda vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ (niz $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ je nul-niz).

neograničeno rastući nizovi

neograničeno rastući nizovi	***nul-nizovi***
n^k, $n,k \in \mathbf{N}$	$\frac{1}{n^k}$
$\sqrt[k]{n}$	$\frac{1}{\sqrt[k]{n}}$
$n^{\frac{k}{m}}$, $k,m \in \mathbf{N}$	$\frac{1}{n^{\frac{k}{m}}}$
$\log n$	$\frac{1}{\log n}$

2.4.2. ALGEBRA NIZOVA

U skupu svih beskonačnih nizova realnih brojeva definiramo zbrajanje (oduzimanje) i množenje po uzoru na zbrajanje (oduzimanje) i množenje realnih brojeva.
Neka su zadana bilo koja dva niza realnih brojeva (a_n) i (b_n). Definirajmo zbroj i produkt nizova na sljedeći način:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n),$$
$$(a_n) - (b_n) = (a_n) + (-b_n) = (a_n - b_n),$$

$$(a_n)\cdot(b_n)=(a_n\cdot b_n).$$

Ako su svi članovi niza (b_n) različiti od 0, onda definiramo i količnik niza kao:

$$\frac{(a_n)}{(b_n)}=\left(\frac{a_n}{b_n}\right).$$

Kombinirajući dva ili više nizova dobivamo složenije nizove. Da bi izračunali njihove limese koristimo teorem o konvergentnim nizovima.

Teorem o konvergentnim nizovima

teorem o konvergentnim nizovima

Neka su zadana dva konvergentna niza (a_n) i (b_n). Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$. Tada vrijedi:

1. Niz $(a_n)\pm(b_n)=(a_n\pm b_n)$ je konvergentan i
$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n=a\pm b.$$
2. Niz $(a_n)\cdot(b_n)=(a_n\cdot b_n)$ je konvergentan i
$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=a\cdot b.$$
3. Ako je $b_n\neq 0$ za svaki $n\in\mathbf{N}$ i ako je $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, onda je
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{a}{b}.$$
4. Niz ${a_n}^{b_n}$ je konvergentan i vrijedi
$$\lim_{n\to\infty}{a_n}^{b_n}=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=a^b.$$

Posebno istaknimo kada je niz (c_n) konstantan niz, tj. $c_n=c$. Tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}c_n=c.$$

Za konvergentne nizove $(c_n)\pm(a_n)=(c_n\pm a_n)$ i $(c_n)\cdot(a_n)=(c_n\cdot a_n)$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm c)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm c=a\pm c \text{ i}$$

$$\lim_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=c\cdot\lim_{n\to\infty}a_n=c\cdot a.$$

Primjer 1. Odredimo limes zadanih nizova:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0+0=0,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot 0=0,$

Analogijom možemo zaključiti i da je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n^4}=\ldots=\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n^k}=0.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+0}=1.$

Primjer 2. Izračunajmo:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n-2}{3n+5}$

Ako primijenimo teorem o konvergentnim nizovima – limes kvocijenta dobit ćemo $\frac{\infty}{\infty}$, tj. neodređeni izraz. Da bismo mogli odrediti limes niza (a_n) preoblikujmo $a_n=\frac{7n-2}{3n+5}$ tako da brojnik i nazivnik podijelimo s najvećom potencijom od n koja se pojavljuje u a_n, u ovom slučaju s n. Dobivamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n-2\,/:n}{3n+5\,/:n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7-\frac{2}{n}}{3+\frac{5}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(7-\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}\right)}=\frac{7-0}{3+0}=\frac{7}{3},$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n+3\,/:n^3}{7n^3+n-2\,\;/:n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{7+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}}=\frac{0-0+0}{7+0-0}=0,$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+1\;\,/:n^3}{2n^2-1/:n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}}=\frac{1-0}{0-0}=\frac{1}{0}=\infty,$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)\qquad /:n^3}{(n+2)(n+3)(n+4)/:n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)}=$

$=\frac{1\cdot(1+0)\cdot 0}{(1+0)(1+0)(1+0)}=0,$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n\qquad /:n}{\sqrt{n^2+2n}+n\,/:n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+1}=1$

Limes geometrijskog niza

Beskonačan geometrijski niz (a_n) s kvocijentom q je konvergentan ako je $|q|<1$, a divergentan ako je $|q|>1$.

Za $|q|<1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

limes geometrijskog niza

Primjer 3. Izračunajmo:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3}{5^n-1}$

Neka je $a^n = \frac{2^n+3}{5^n-1}$. Nakon što brojnik i nazivnik podijelimo sa 3^n dobit ćemo $a^n = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{3}{5^n}}{1-\frac{1}{5^n}}$. Kako je $b_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ geometrijski niz s $q=\frac{2}{5}<1$, to je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$. Analogno vrijedi za nizove s općim članovima $c_n = \frac{1}{5^n}$ i $d_n = \frac{3}{5^n}$.

Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3}{5^n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{3}{5^n}}{1-\frac{1}{5^n}} = \frac{0+0}{1-0} = 0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{n^2+2\cdot 3^n}$

Budući da eksponencijalna funkcija raste brže od algebarske, vrijedi:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$ za $a>1,\ a\in\mathbf{R},\ p>0$.

Da bismo izračunali limes niza brojnik i nazivnik dijelimo potencijom najveće baze, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n \quad /:3^n}{n^2+2\cdot 3^n \quad /:3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\frac{n^2}{3^n}+2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

Broj *e*

U skupu monotonih nizova posebnu pažnju pridajemo konvergentnom nizu kojim definiramo broj $e \approx 2.7183\ldots$ koji se pojavljuje npr. kao baza prirodnog logaritma. Oznaka e za taj broj je opće prihvaćena u čast matematičara Leonarda Eulera (1707-1783). Vrijedi:

broj e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e .$$

2.5. POJAM REDA. GEOMETRIJSKI RED

2.5.1. POJAM REDA

Neka su a_1, a_2, a_3, …, a_n članovi niza (a_n). Zbrajajući članove niza (a_n) dobivamo niz parcijalnih suma (S_n):

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Nastavi li se postupak zbrajanja u beskonačnost: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ postavlja se pitanje je li zbroj konačan?

Izraz oblika $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ nazivamo **redom** i označavamo s $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

red

Njegova ***n*-ta parcijalna suma** je $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

n-ta parcijalna suma

Kažemo da je red **konvergentan** ako je konvergentan niz (S_n) njegovih parcijalnih suma. U tom je slučaju **suma reda jednaka limesu njegovih parcijalnih suma**: $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

suma reda

U protivnom, red je **divergentan** ako niz (S_n) nije konvergentan.

Primjer Je li red $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ konvergentan?

Ispišimo niz parcijalnih suma $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, $S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$,

$S_4 = S_3 + a_4 = \frac{7}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$, …, tj. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{16}$, …

n-ta parcijalna suma jednaka je zbroju konačnog geometrijskog niza:

$S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^n}$. Tada je $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1$. Red je konvergentan i suma reda jednaka je 1.

2.5.2. GEOMETRIJSKI RED

Ako je (a_n) geometrijski niz, tada red oblika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ nazivamo **geometrijskim redom**.

geometrijski red

Za dani geometrijski niz odredili smo sumu prvih n članova:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \ q \neq 1.$$

To je upravo n-ta parcijalna suma beskonačnog geometrijskog reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n + \ldots$$

Geometrijski red $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$ je **konvergentan** ako i samo ako je $|q| < 1$. Tada je **suma reda**:

suma geometrijskog reda

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Primjer 1. Izračunajmo sumu geometrijskog reda $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + \ldots$

Uočimo da je $a_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $a_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $a_3 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$, odnosno $q = \frac{2}{3}$ i $|q| < 1$. Tada je $S = \frac{a_1}{1-q} = 3\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Primjer 2. Riješimo jednadžbu: $\log x + \log \sqrt[3]{x} + \log \sqrt[9]{x} + \ldots = 3$.

Na lijevoj strani jednadžbe imamo:

$$\log x + \log \sqrt[3]{x} + \log \sqrt[9]{x} + \ldots = \log\left(x \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{9}} \cdot \ldots \right) = \log x^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots}.$$

Izračunajmo sumu geometrijskog reda $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$. Uočimo da je $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{9}$, odnosno $q = \frac{1}{3}$ i $|q| < 1$. Tada je $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

Dobivamo jednadžbu $\log x^{\frac{3}{2}} = 3$, odnosno $\frac{3}{2} \log x = 3$ čije je rješenje $x = 100$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Odredite aritmetički niz ako je:

   a) $\begin{matrix} a_5 + a_{11} = -0.2 \\ a_4 + a_{10} = 2.6 \end{matrix}$,   b) $\begin{matrix} a_1 + a_5 = 24 \\ a_2 \cdot a_3 = 60 \end{matrix}$.

2. U nizu 51, 48, 45, ... odredite prvi član s negativnim predznakom.
3. Odredite x takav da brojevi $\frac{1}{x+2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{x-2}$ budu uzastopni članovi aritmetičkog niza.
4. Koliko članova aritmetičkog niza -9, -6, -3 treba zbrojiti da zbroj bude 66?
5. Koliko članova aritmetičkog niza 2, 5, 8, 11, 14, ... treba zbrojiti da zbroj bude veći od 100?
6. Između 1 i 1.3 treba umetnuti pet brojeva koji će s dvama zadanima činiti sedam uzastopnih članova aritmetičkog niza.
7. Odredite geometrijski niz ako je $\begin{matrix} a_4 - a_6 = 936 \\ a_4 - a_5 = 234 \end{matrix}$.
8. Četiri broja uzastopni su članovi geometrijskog niza. Zbroj dva krajnja je jednak 9, a dva srednja 6. Odredite te brojeve.
9. Odredite x takav da brojevi $\frac{1}{x+2}$, $\frac{1}{x-2}$, $\frac{1}{x-4}$ budu uzastopni članovi geometrijskog niza.
10. Odredite geometrijski niz ako je $\begin{matrix} a_2 + a_5 - a_4 = 10 \\ a_3 + a_6 - a_5 = 20 \end{matrix}$.
11. Odredite a_1, q i n geometrijskog niza ako je $S_n = 40$ i $\begin{matrix} a_6 - a_4 = 216 \\ a_3 - a_1 = 8 \end{matrix}$.
12. Za geometrijski niz odredite preostala dva tražena podatka:

    a) $a_1 = 3$, $a_n = 192$, $S_n = 381$
       $n, q = ?$

    b) $a_1 = 6$, $q = 2$, $S_n = 3066$
       $n,\ a_n = ?$

13. Izračunajte:

    a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7-3n}{9n-4}\cdot\frac{9n^3-5n}{3n^3+4n^2-5}\right)$,

    b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^4-2n}+2n}{-4n^2-3n}$,

    c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{5n^2+n+3}-\sqrt{5n^2+2n}\right)$,

    d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-5\cdot 2^n+7^{n+2}}{3\cdot 2^n-7^n+9\cdot 3^n}$.

3. FUNKCIJE

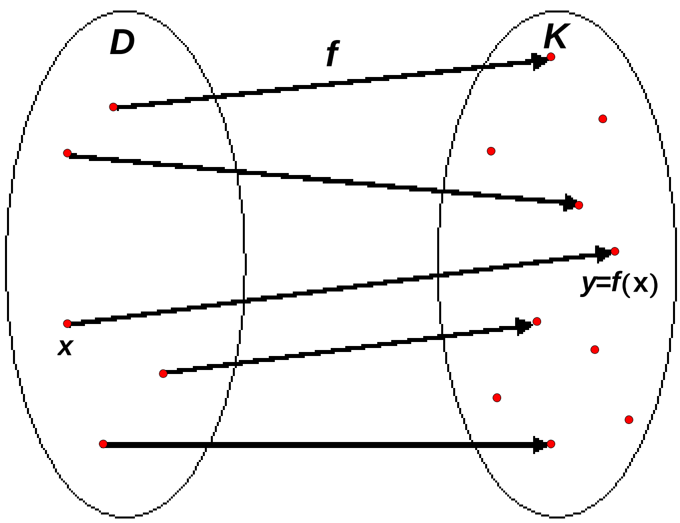
Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Što je funkcija? Koji su primjeri funkcija u svakodnevnom životu?*
2. *Kako zadajemo funkcije? Koja su osnovna svojstva funkcija?*
3. *Što je kompozicija funkcija?*
4. *Kako računamo limes funkcije?*

3.1. POJAM FUNKCIJE

3.1.1. DEFINICIJA FUNKCIJE

funkcija

Neka su D i K dva neprazna skupa. **Funkcija** f sa skupa D u skup K je pravilo (postupak) koje svakom elementu skupa D pridružuje **točno** jedan element skupa K, pišemo: $f: D \to K$ ili $x \mapsto y = f(x)$.



domena

kodomena

Skup D nazivamo **područje definicije** ili **domena** funkcije, a skup K **područje vrijednosti** ili **kodomena** funkcije f.

zavisna varijabla

nezavisna varijable

Element x skupa D nazivamo **argument funkcije** (**nezavisna varijabla** ili ulazna vrijednost funkcije), a njemu pridruženi element y, oznaka $y = f(x)$, nazivamo **vrijednost funkcije** (**zavisna varijabla**, izlazna vrijednost funkcije ili rezultat djelovanja funkcije na nezavisnu varijablu).

Ovdje promatramo samo funkcije kojima su domena i kodomena podskupovi skupa realnih brojeva. Tada govorimo o realnoj funkciji realne varijable, $f: D \to K$, $D, K \subseteq \mathbf{R}$.

slika funkcije

Slika funkcije $f: D \to K$ je skup svih vrijednosti funkcije, tj. $f(D) = \{y \in K : y = f(x), x \in D\}$. Očito je $f(D) \subseteq K$.

3.1.2. ZADAVANJE FUNKCIJE

Funkcije možemo zadati:

zadavanje funkcije

1. **analitički**
2. **tablicom**
3. **grafom**

Funkcija zadana analitički

Ako je pravilo pridruživanja kojim funkcija elementima iz domene pridružuje elemente kodomene izraženo formulom, tada kažemo da je funkcija zadana analitički.

Primjer 1. Za funkcije zadane analitički odredimo funkcijske vrijednosti ako je:

a) $f(x)=x-\frac{1}{x},\ x=3$

$f(3)=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$

b) $f(x)=\log(3x+5),\ x=-\frac{4}{3}$

$f(3)=\log\left(3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+5\right)=\log 1=0$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ x-1, & x\geq 1 \end{cases},\ x=-1,\ x=2$

Da bismo odredili $f(-1)$ uočimo da je tada $f(x)=x^2$ što daje $f(-1)=1$, a da bismo odredili $f(2)$ uočimo da je tada $f(x)=x-1$ što daje $f(2)=1$.

Primjer 2. Odredimo $f(x)$ ako je $f\left(-\frac{2}{3}x+1\right)=x$.

Označimo $t=-\frac{2}{3}x+1$. Tada je $x=-\frac{3}{2}\cdot(t-1)$ pa je $f(t)=-\frac{3}{2}\cdot(t-1)$, odnosno $f(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$.

Funkcija zadana tablicom

Funkciju možemo zadati pomoću tablice u kojoj za vrijednosti nezavisne varijable navodimo pripadne vrijednosti zavisne varijable, tj. funkcijske vrijednosti. Takve tablice uglavnom nastaju na dva načina:

- Brojčane rezultate nekih eksperimenata ili pojava zapisujemo pomoću tablica.
- Poznata je formula za funkciju $f(x)$ i primjenom te formule tabeliramo

vrijednosti koje su značajne za proučavanje pojave ili procesa.
Razvoj primjene matematike posebice u fizici i mehanici tijekom 17. i 18. stoljeća zahtijevao je računanje s eksponencijalnim, logaritamskim i trigonometrijskim funkcijama. Da bi se olakšalo mukotrpno računanje, vrijednosti spomenutih funkcija tiskane su u obliku tablica. Jedne od prvih jesu Napierove logaritamske tablice.

Funkcija zadana grafom

Ovaj način zadavanja funkcije ima vrlo značajnu praktičnu primjenu, osobito u znanstvenim istraživanjima. Poznati su razni instrumenti, npr. seizmograf, tahograf, elektrokardiograf i dr. koji neprekidno mjere određene veličine i crtaju graf funkcije.

Graf funkcije $f : D \to \mathbf{R}$ je skup svih točaka $(x, f(x))$, $x \in D$. Pišemo:

$$\Gamma_f = \{(x, y) : y = f(x), x \in D\}.$$

Ako su vrijednosti funkcije f određene formulom $f(x)$ kažemo da je $y = f(x)$ jednadžba grafa funkcije (jednadžba krivulje).

Pitamo se je li svaka krivulja u ravnini graf neke funkcije? Nije. Odgovor na pitanje daje nam definicija funkcije u kojoj je istaknuto da je svakom elementu domene pridružen točno jedan element kodomene.
Općenito provjeru je li neka krivulja graf funkcije možemo provesti pomoću **vertikalnog testa**:
Krivulja predstavlja graf funkcije ako ne postoji niti jedan vertikalan pravac koji krivulju siječe u više od jedne točke.

3.1.3. JEDNAKOST FUNKCIJA

jednakost funkcija

Kažemo da su funkcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$ **jednake** i pišemo $f = g$ ako su im jednake domene ($A = C$), jednake kodomene ($B = D$) i ako je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in A$.

Primjer Jesu li jednake funkcije:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ i $g(x) = x - 1$
Funkcije nisu jednake jer funkcija f nije definirana za $x = -1$, a funkcija g je definirana za svaki $x \in \mathbf{R}$, tj. $D(f) \neq D(g)$.

b) $f(x) = 2\cos^2 x$ i $g(x) = 1 + \cos 2x$
Područje definicije i funkcije f i funkcije g je skup $\mathbf{R}$, tj. $D(f) = D(g) = \mathbf{R}$. Uočimo da vrijedi:

$$1 + \cos 2x = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x,$$

što daje $g(x) = 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x = f(x)$. Funkcije f i g su jednake.

3.1.4. DOMENA FUNKCIJE

Domena ili **područje definicije** realne funkcije je skup svih realnih brojeva za koje je definiran zakon pridruživanja (za koje zakon pridruživanja ima smisla).

domena funkcije

Primjer Odredimo domenu realnih funkcija:

a) $f(x)=x^2-2x+3$

Domena funkcije je skup $\mathbf{R}$.

b) $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-x}$

Zadani izraz $\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-x}$ nema smisla za one vrijednosti x za koje je nazivnik jednak nuli (dijeljenje s nulom nije definirano). Budući da je $x^2-x=0$ za $x=0$ ili $x=1$, to je $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$.

c) $f(x)=\log(x^2-9)+2$

Argument logaritamske funkcije mora biti pozitivan, tj. $x^2-9>0$, odakle slijedi $D(f)=\langle-\infty,-3\rangle\cup\langle3,\infty\rangle$.

d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$

Mora biti $\dfrac{x}{2-x}\geq 0$ i $2-x\neq 0$, odakle slijedi $D(f)=[0,2\rangle$.

e) $f(x)=\sqrt{4-x}+3\log(x-1)$

Zadana funkcija poprimit će realne vrijednosti ako je $4-x\geq 0$ i $x-1>0$. Iz $4-x\geq 0$ slijedi $x\leq 4$, a iz $x-1>0$ slijedi $x>1$, što daje $D(f)=\langle1,4]$.

f) $f(x)=\sqrt{\log\dfrac{2-x}{1+x}}$

Zadana funkcija poprimit će realne vrijednosti ako je $\log\dfrac{2-x}{1+x}\geq 0$ i $\dfrac{2-x}{1+x}>0$. Odredimo rješenja dobivenih nejednadžbi. Nejednadžba $\log\dfrac{2-x}{1+x}\geq 0$ ekvivalentna je nejednadžbi $\dfrac{2-x}{1+x}\geq 1$ i dalje $\dfrac{1-2x}{1+x}\geq 0$ čije je rješenje $x\in\left\langle-1,\dfrac{1}{2}\right]$. Rješenje nejednadžbe $\dfrac{2-x}{1+x}>0$ je $x\in\langle-1,2\rangle$. Da bi odredili sve x koji zadovoljavaju oba uvjeta moramo odrediti presjek intervala $\left\langle-1,\dfrac{1}{2}\right]$ i $\langle-1,2\rangle$. Domena funkcije je $D(f)=\left\langle-1,\dfrac{1}{2}\right]$.

3.2. SVOJSTVA FUNKCIJE

3.2.1. MONOTONOST

rastuća funkcija

Kažemo da je realna funkcija f **rastuća** na intervalu I iz domene ako za sve x_1 i x_2 iz intervala I vrijedi:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2).$$

padajuća funkcija

Kažemo da je realna funkcija f **padajuća** na intervalu I iz domene ako za sve x_1 i x_2 iz intervala I vrijedi:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2).$$

konstantna funkcija

Kažemo da je realna funkcija f **konstantna** na intervalu I iz domene ako za sve x_1 i x_2 iz intervala I vrijedi:

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Ako umjesto nejednakosti $\le$ ili $\ge$ vrijede stroge nejednakosti < ili > u gornjim definicijama, onda govorimo o **strogo rastućoj**, odnosno **strogo padajućoj** funkciji.

intervali monotonosti

Padajuće ili rastuće funkcije jednim imenom zovemo **monotonim** funkcijama.
Intervale na kojima je funkcija rastuća ili padajuća nazivamo **intervalima monotonosti** funkcije.

3.2.2. PARNOST I NEPARNOST

parna funkcija

Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbf{R}$ **parna** ako i samo ako vrijedi $f(-x) = f(x)$ za sve vrijednosti $x \in D$.

neparna funkcija

Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbf{R}$ **neparna** ako i samo ako vrijedi $f(x) = -f(x)$ za sve vrijednosti $x \in D$.

Ako je funkcija parna, tada je njezin graf simetričan s obzirom na os y.
Graf neparne funkcije simetričan je u odnosu na ishodište kao centar simetrije.

Primijetimo da većina funkcija nije niti parna niti neparna.

Primjer Koje su od sljedećih funkcija parne, a koje neparne?

a) $f(x) = 5x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \sin^2 3x$

$$f(-x) = 5(-x)^2 - \frac{1}{2}(-x)^4 + \sin^2(3\cdot(-x)) = 5x^2 - \frac{1}{2}x^4 + (-\sin 3x)^2 =$$

$$= 5x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \sin^2 3x = f(x)$$

Funkcija je parna.

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+(-x)+1}-\sqrt{(-x)^2-(-x)+1}=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}=$$
$$=-\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=-f(x)$$

Funkcija je neparna.

c) $f(x)=\log\frac{x-3}{x+3}$

$$f(-x)=\log\frac{-x-3}{-x+3}=\log\frac{x+3}{x-3}=\log\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^{-1}=-\log\frac{x-3}{x+3}=-f(x)$$

Funkcija je neparna.

d) $f(x)=17$

$f(-x)=17$ pa je $f(x)=f(-x)$. Funkcija je parna.

e) $f(x)=3x-8$

$f(-x)=3\cdot(-x)-8=-3x-8\neq f(x)$

Funkcija nije ni parna ni neparna.

3.2.3. PERIODIČNOST

Kažemo da je funkcija $f:D\to\mathbf{R}$ **periodična** ako postoji broj $P>0$ takav da za sve $x\in D$ vrijedi $f(x)=f(x+P)$. Broj P naziva se **period** funkcije f. Najmanji pozitivan broj P_0 za koji to vrijedi naziva se **temeljni period**.

periodičnost

period

temeljni period

Primjer 1. Provjerimo da li je $P=\frac{2\pi}{3}$ period funkcije $f(x)=1+3\sin 3x+2\cos 6x$.

$$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=1+3\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+2\cos 6\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=1+\sin(3x+2\pi)+6\cos(6x+4\pi)=$$
$$=1+3\sin 3x+2\cos 6x=f(x).$$

Zbroj, razlika, kvocijent i produkt periodičnih funkcija sa **sumjerljivim** periodima ponovo je periodična funkcija. (Kažemo da su sva broja a i b sumjerljiva ako je $\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}$. U suprotnom, a i b su nesumjerljivi.)

Neka su P_1, P_2, P_3, …, P_n temeljni periodi funkcija f_1, f_2, f_3, …, f_n. Tada je funkcija $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x)$ periodična s temeljnim periodom jednakim najmanjem zajedničkom višekratniku perioda P_1, P_2, P_3, …, P_n.

Primjer 2. Odredimo temeljni period funkcije $f(x)=\sin 2x+\cos 3x+tg\frac{x}{4}$.

Označimo s $f_1(x)=\sin 2x$, $f_2(x)=\cos 3x$ i $f_3(x)=tg\frac{x}{4}$. Tada su periodi navedenih funkcija $P_1=\frac{2\pi}{2}=\pi$, $P_2=\frac{2\pi}{3}$ i $P_1=\frac{\pi}{\frac{1}{4}}=4\pi$. Najmanji zajednički višekratnik perioda P_1, P_2, P_3: $V(P_1,P_2,P_3)=V\left(\pi,\frac{2\pi}{3},4\pi\right)=4\pi$. Temeljni period zadane funkcije je 4π.

3.3. KOMPOZICIJA FUNKCIJA

Neka su $f:D_f\to\mathbf{R}$ i $g:D_g\to\mathbf{R}$ zadane funkcije. Neka je x bilo koji element iz domene D_f funkcije f i $y=f(x)$. Ako je $y\in D_g$, onda je definirana vrijednost $g(y)=g(f(x))$, odnosno postoji funkcija $h:D_f\to\mathbf{R}$ takva da je $h(x)=g(f(x))$. Funkciju h nazivamo **kompozicija funkcija** g i f i označavamo $h=g\circ f$.

kompozicija funkcija

Područje definicije funkcije h podskup je skupa D_f jer sadrži samo one $x\in D_f$ za koje vrijedi $f(x)\in D_g$.

Svojstva kompozicije:

svojstva kompozicije

1. Kompozicija funkcija općenito **nije komutativna**, tj. $g\circ f\neq f\circ g$.
2. Kompozicija funkcija je **asocijativna**, tj. $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

Primjer 1. Odredimo kompozicije $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ i $g\circ g$ ako su zadane funkcije $f(x)=2x-3$ i $g(x)=x+4$.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+4)=2(x+4)-3=2x+5,$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-3)=2x-3+4=2x+1,$$
$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x-3)=2(2x-3)-3=4x-9,$$
$$(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x+4)=x+4+4=x+8.$$

Primjer 2. Odredimo kompoziciju $f\circ g$ ako su zadane funkcije $f(x)=\frac{1}{1-2x}$ i $g(x)=\frac{1}{x}$.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-2\cdot\frac{1}{x}}=\frac{1}{\frac{x-2}{x}}=\frac{x}{x-2}.$$

Primjer 3. Odredimo kompoziciju $g\circ f$ ako su zadane funkcije $f(x)=\log_2(3x+5)$ i $g(x)=2^{2x}$.

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\log_2(3x+5))=2^{2\log_2(3x+5)}=\left(2^{\log_2(3x+5)}\right)^2=(3x+5)^2=$$
$$=9x^2+60x+25.$$

Primjer 4. Ako su zadane funkcije $f(x)=\frac{10^{2x}-1}{1-x\cdot 10^{x}}$ i $g(x)=\log x$, odredimo $(f\circ g)(1)$.

Odredimo najprije kompoziciju $f\circ g$:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\log x)=\frac{10^{2\log x}-1}{1-\log x\cdot 10^{\log x}}=\frac{x^2-1}{1-x\cdot\log x}.$$

Sada je $(f\circ g)(1)=\frac{1^2-1}{1-1\cdot\log 1}=\frac{0}{1}=0$.

Primjer 5. Odredimo rješenja jednadžbe $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ ako je $f(x)=3x+2$ i $g(x)=x^2+2x-3$.

Odredimo najprije kompozicije $f\circ g$ i $g\circ f$:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(x^2+2x-3\right)=3\left(x^2+2x-3\right)+2=3x^2+6x-7,$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=f(3x+2)=(3x+2)^2+2(3x+2)-3=9x^2+18x+5.$$

Dobivamo jednadžbu: $3x^2+6x-7=9x^2+18x+5$, odnosno $x^2+2x+2=0$ čija su rješenja $x_{1,2}=-1\pm i$.

3.4. INVERZNA FUNKCIJA

Kažemo da je funkcija $f:D\to\mathbf{R}$ **injekcija** ako za sve $x_1,x_2\in D$ vrijedi:

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2).$$

injekcija

Ako je funkcija $f:D\to\mathbf{R}$ injekcija, onda možemo definirati preslikavanje $g:f(D)\to D$ sa svojstvom da je $g(y)=x$ pri čemu je $y=f(x)$.
Vrijedi: $g(f(x))=x$, odnosno $(g\circ f)(x)=x$.

Funkciju g koja ima svojstvo da je $(g\circ f)(x)=x$ nazivamo **inverzna funkcija** funkcije f i označavamo f^{-1}.

inverzna funkcija

Svaka injekcija $f:D\to\mathbf{R}$ ima inverznu funkciju $f^{-1}:f(D)\to D$:

$$y=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x,\ \text{ za svaki } x\in D \text{ i svaki } y\in f(D).$$

Svojstva inverzne funkcije:

1. Funkcija i njoj inverzna funkcija u kompoziciji daju identitetu ili identično preslikavanje:
$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=x \text{ i } \left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x.$$
2. Funkcija i njoj inverzna funkcija međusobno su inverzne: $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$.
3. Grafovi simetričnih funkcija osno su simetrični s obzirom na pravac $y=x$.

Postupak određivanja inverzne funkcije:

određivanje inverzne funkcije

1. Jednadžbu $y = f(x)$ riješimo po nepoznanici x.
2. Ako postoji jedinstveno rješenje te jednadžbe, onda funkcija f ima inverznu funkciju $x = f^{-1}(y)$.
3. Zamjenimo „imena“ veličinama x i y da bismo dobili zapis $y = f^{-1}(x)$.

Primjer Odredimo inverznu funkciju zadanim funkcijama:

a) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$

Riješimo jednadžbu $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ po nepoznanici x. Dobivamo $x=\dfrac{3+y}{1-y}$ pa je $f^{-1}(y)=\dfrac{3+y}{1-y}$, odnosno nakon zamjene $x \leftrightarrow y$ dobivamo inverznu funkciju $f^{-1}(x)=\dfrac{3+x}{1-x}$.

b) $f(x)=5+\sqrt[3]{4-3x}$

Riješimo jednadžbu $y=5+\sqrt[3]{4-3x}$ po nepoznanici x. Kubiranjem i sređivanjem dobivamo $x=\dfrac{1}{3}\left[4-(y-5)^3\right]$ pa je $f^{-1}(y)=\dfrac{1}{3}\left[4-(y-5)^3\right]$, odnosno nakon zamjene $x \leftrightarrow y$ dobivamo inverznu funkciju

$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}\left[4-(x-5)^3\right]$.

c) $f(x)=(9x+7)^5-101$

Riješimo jednadžbu $y=(9x+7)^5-101$ po nepoznanici x. Korjenovanjem i sređivanjem dobivamo $x=\dfrac{1}{9}\left[\sqrt[5]{y+101}-7\right]$ pa je

$f^{-1}(y)=\dfrac{1}{9}\left[\sqrt[5]{y+101}-7\right]$, odnosno nakon zamjene $x \leftrightarrow y$ dobivamo inverznu funkciju $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{9}\left[\sqrt[5]{x+101}-7\right]$.

d) $f(x)=\log_2(x-1)$

Riješimo jednadžbu $y=\log_2(x-1)$ po nepoznanici x. Dobivamo $x=2^y+1$ pa je $f^{-1}(y)=2^y+1$, odnosno nakon zamjene $x \leftrightarrow y$ dobivamo inverznu funkciju $f^{-1}(x)=2^x+1$.

e) $f(x)=3^{x+2}+3$

Riješimo jednadžbu $y=3^{x+2}+3$ po nepoznanici x. Logaritmiranjem i sređivanjem dobivamo $x=\log_3(y-3)-2$ pa je $f^{-1}(y)=\log_3(y-3)-2$,

odnosno nakon zamjene $x \leftrightarrow y$ dobivamo inverznu funkciju
$f^{-1}(x) = \log_3(x-3) - 2$.

3.5. LIMES FUNKCIJE

3.5.1. POJAM LIMESA FUNKCIJE

Analogno kao što se je promatrao limes ili granična vrijednost niza (x_n) kada n teži u beskonačno, može se promatrati što se događa sa vrijednostima $f(x)$ funkcije $f : D \to \mathbf{R}$ kada varijabla x teži prema nekoj točki x_0 (ili prema ∞ ili $-\infty$). Drugim riječima, ako se vrijednosti funkcije $f(x)$ sve više i više približavaju nekom realnom broju L, onda ćemo reći da je L limes ili granična vrijednost funkcije $f : D \to \mathbf{R}$ u točki x_0.

limes funkcije

Kažemo da funkcija f ima **limes L u točki** x_0 ako za svaki niz (x_n) koji teži k x_0 niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_n))$ teži k L. Pišemo: $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Podrazumijevamo da je funkcija f definirana za sve x u okolini broja x_0, ali ne nužno i za $x = x_0$.

Svojstva limesa

svojstva limesa

Prema svojstvima konvergentnih nizova i definicije limesa funkcije zaključujemo da vrijedi:
Ako su f i g dvije funkcije i ako je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, onda vrijedi:

1. $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$
2. a) $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$

   b) $\lim\limits_{x \to x_0}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \cdot A$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$ uz uvjet $B \neq 0$ i $g(x) \neq 0$ u okolini od x_0.

3.5.2. RAČUNAJE LIMESA FUNKCIJE

Pravilo direktne zamjene

pravilo direktne zamjene

Za sve elementarne funkcije u svakoj točki x_0 u kojoj su one definirane vrijedi:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Primjer 1. Odredimo:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=3\cdot 2+1=7$,

b) $\lim\limits_{x\to -1}(4x^3+x^2-1)=4\cdot(-1)^3+(-1)^2-1=-3+1-1=-4$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{3x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)}=\dfrac{1}{2}$.

Limes racionalnih funkcija

limes racionalnih funkcija

Primjer 2. Izračunajmo $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

Postupimo li kao u prethodnom primjeru dobivamo $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{0}{0}$, odnosno neodređeni oblik (limes). Funkcija $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ nije definirana za $x=1$. Uočimo da se brojnik i nazivnik zadane funkcije poništavaju u točki $x=1$, odnosno da su brojnik i nazivnik djeljivi s $x-1$. Dijeleći dobivamo:

$f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. Dobivena funkcija jednaka je zadanoj za sve $x\neq 1$. Zato je $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}$.

Pravilo: Ako se brojnik i nazivnik racionalne funkcije poništavaju u točki x_0, tada se limes te funkcije računa tako da se najprije brojnik i nazivnik podijele s $x-x_0$.

Primjer 3. Izračunajmo:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{x-3}=\dfrac{1}{5}$,

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^2+2x+1}{3x-1}=6$.

Limes iracionalnih funkcija

limes iracionalnih funkcija

Primjer 4. Izračunajmo:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+1}=\dfrac{1}{2}$,

b) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}=\lim\limits_{x\to5}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$,

c) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2+x+3}-x}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2+x+3}-x}{x+3}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+3}+x}{\sqrt{x^2+x+3}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+x+3-x^2}{(x+3)\left(\sqrt{x^2+x+3}+x\right)}=\lim\limits_{x\to-3}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+3}+x}=\frac{1}{6}$.

Neki važniji limesi

Dobro je upamtiti poznate limese:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin nx}{x}=n,\quad \lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Odredite $f(x)$ ako je:

a) $f(x+1)=2x+3$, b) $f(1-2x)=4x^2-3$, c) $f\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=\frac{2x-1}{x+3}$,

d) $f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x+1}{x-2}$, e) $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{x^2-x}{1-2x}$.

2. Odredite domenu funkcije:

a) $f(x)=\sqrt{4x-x^2}\cdot\log_2\left(x^2-1\right)$,

b) $f(x)=\sqrt{\log\left(x^2-8x+13\right)}$,

c) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-5}}$,

d) $f(x)=\frac{5x}{4-x^2}+\log(x+3)$,

e) $f(x)=\log_3\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)$,

f) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{5}{\sqrt{3+2x-x^2}}$,

g) $f(x)=\frac{\sqrt{4x-x^2}}{\log\left(x^2-1\right)}$,

h) $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$.

3. Ispitajte parnost, odnosno neparnost funkcija:

a) $f(x)=\ln\frac{x+3}{x-3}$,

b) $f(x)=\frac{2^x+3^x}{2^x-3^x}$,

c) $f(x)=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}$,

d) $f(x)=\frac{tg^2x}{\sin3x+ctg4x}$,

e) $f(x)=\frac{x+\sin x}{tg^2x+ctg^2x}$,

f) $f(x)=3tg^4x-2tg^2x-1$.

4. Odredite temeljni period funkcije:

a) $f(x)=\cos\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{3}$,

b) $f(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$,

c) $f(x)=2\sin\frac{x}{2}-\cos 3x+4ctg\frac{x}{4}$,

d) $f(x)=\cos(3x-2)-5\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$,

e) $f(x)=6\sin 3\pi x-tg\frac{3\pi}{4}x$.

5. a) Odredite kompozicije $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ i $g\circ g$ ako je $f(x)=2x-3$ i $g(x)=x^2+3$.

b) Riješite jednadžbu $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ ako je $f(x)=2x-1$ i $g(x)=2x^2-x+1$.

c) Ako je $f(x)=\sin\pi x$ i $g(x)=\frac{1}{3}x+1$, odredite $(f\circ g)(x)$ i $(g\circ f)(x)$. Koliko je $(g\circ f)(-11)$?

d) Riješite nejednadžbu $(f\circ g)(x)\le(g\circ f)(x)$ ako je $f(x)=x^2-x-1$ i $g(x)=2x+1$.

e) Odredite kompozicije $f\circ g$ i $g\circ f$ i njihove domene ako je $f(x)=\frac{1}{1+3x}$ i $g(x)=\frac{1}{x-1}$.

6. Odredite inverznu funkciju funkcije:

a) $f(x)=(7x-2)^3+32$,

b) $f(x)=3-\sqrt[5]{4x^3-1}$,

c) $f(x)=\frac{2-x}{2+3x}$,

d) $f(x)=3^{x-1}+2$,

e) $f(x)=2^{1-\frac{x}{2}}$,

f) $f(x)=4\cdot 3^{2-x}+1$,

g) $f(x)=\log_2(x-1)$,

h) $f(x)=3-2\log_2 4x$.

7. Izračunajte limese:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}$,

b) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$,

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$,

d) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$,

e) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-7x+10}$,

f) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$,

g) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3+1}$,

h) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2+x+3}-x}{x+3}$,

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^3+2x^2-1}{2x^3+3x-4}$,

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}-3}{x+1}$,

k) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-x}{\sqrt{x+1}+x}$,

l) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

4. DERIVACIJE

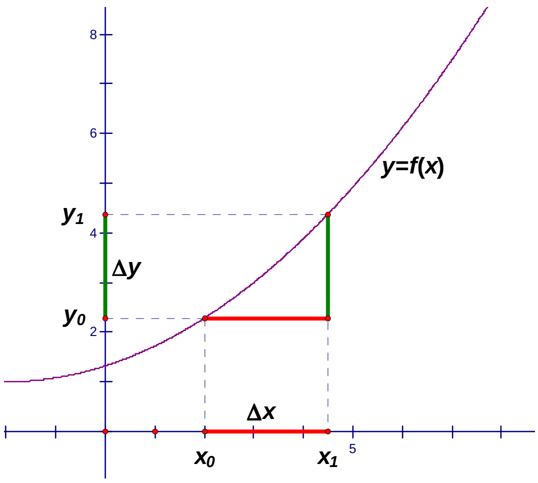
Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
Što je derivacija funkcije? Kako se povijesno uvodi? Kako se određuje za elementarne i složene funkcije?

4.1. PRIRAST FUNKCIJE

Neka je zadana funkcija $f: I \to \mathbf{R}$. Odaberimo točke $x_0, x_1 \in I$ .Njima pripadaju funkcijske vrijednosti $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$. Označimo s Δx **prirast (promjenu) varijable** x, tj.

prirast varijable

$$\Delta x = x_1 - x_0 \text{ ili } x_1 = x_0 + \Delta x .$$



Promjena varijable od x_0 na $x_1 = x_0 + \Delta x$ uzrokuje i promjenu funkcijskih vrijednosti, od vrijednosti $f(x_0)$ prelazimo na vrijednost $f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$. Ovako nastalu promjenu označavamo s $\Delta y = \Delta f(x_0)$, a definiramo kao:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = y_1 - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Kažemo da je Δy **prirast (promjena) funkcije** f u točki x_0 za prirast varijable Δx .

prirast funkcije

Primjer 1. Odredi prirast funkcije $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ u točki $x_0 = 1$ za prirast varijable $\Delta x = 3$.

Iz definiciji slijedi:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1+3) - f(1) = f(4) - f(1) = 66 - 6 = 60 .$$

Primjer 2. Za koliko se treba promijeniti vrijednost varijable x od početne vrijednosti – 6 da bi funkcija $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6$ imala prirast 2?

Početna vrijednost je $x_0 = -6$, a prirast funkcije je $\Delta y = \Delta f(x_0) = 2$. Znamo $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ što za $x_0 = -6$ daje:

$\Delta y = \Delta f(-6) = f(-6+\Delta x) - f(-6) =$

$= -\frac{1}{2}(-6+\Delta x)^2 - 4(-6+\Delta x) - 6 - \left[-\frac{1}{2}\cdot(-6)^2 - 4\cdot(-6) - 6\right] = 2\Delta x - \frac{1}{2}(\Delta x)^2 = 2$

Iz čega slijedi: $(\Delta x - 2)^2 = 0$, odnosno $\Delta x = 2$.

4.2. PROBLEM BRZINE. PROBLEM TANGENTE

Problem brzine

problem brzine

Brzina je definirana kao omjer prijeđenog puta i vremena koje je potrebno da se taj put prijeđe. Ako označimo sa $s(t)$ funkciju koja opisuje ovisnost puta o vremenu, tada pod prirastom puta u vremenskom intervalu $[t_0, t_1]$ podrazumijevamo $\Delta s = s(t_0+\Delta t) - s(t_0)$. Tada je prosječna brzina gibanja u intervalu $[t_0, t_1]$ dana s:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Često nam podatak o prosječnoj brzini gibanja ne govori baš previše o samom karakteru gibanja. Znatno bismo bolje mogli opisati gibanje kad bismo izračunali brzinu za kraće vremenske intervale, tj. srednja brzina bit će sve bliža stvarnoj brzini što je Δt manji.

Srednja (prosječna) brzina se manje razlikuje od stvarne brzine što je vrijeme promatranja kraće, odnosno možemo reći da je granična vrijednost srednje brzine kada $t_1 \to t_0$ jednaka brzini u trenutku t_0. Zapisujemo:

$$\lim_{t_1 \to t_0} \bar{v} = v(t_0)$$

ili

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

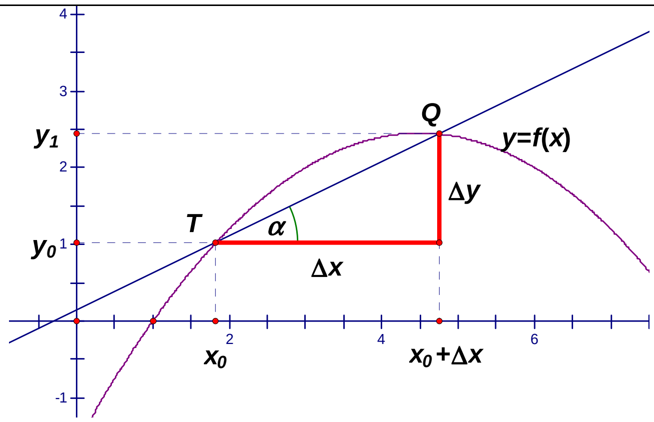
Problem tangente

problem tangente

Ako u definiciji srednje (prosječne) brzine $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ napravimo zamjenu oznaka u matematički uobičajene $[s \to y, t \to x, y = f(x)]$, dobit ćemo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Što je srednja brzina promjene funkcije f na intervalu $[x_0, x_0+\Delta x]$?
Pogledajmo što smo dobili.
Neka je funkcija f dana svojim grafom $y = f(x)$.

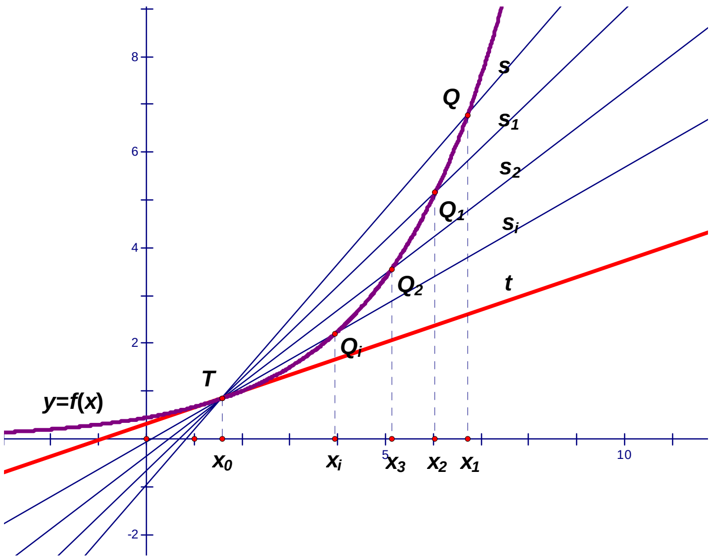


Uočimo točke $T(x_0, y_0)$ i $Q(x_0+\Delta x, y_1)$ na grafu funkcije. Tada je $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$.
Kako je kut α kut kojeg pravac koji prolazi točkama T i Q čini s osi apscisa, to je $tg\alpha$ jednak koeficijentu smjera tog pravca.

Zaključujemo:
Srednja brzina promjene funkcije jednaka je koeficijentu smjera sekante koja prolazi točkama $T(x_0, f(x_0))$ i $Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$, tj.

$$k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Što će se dogoditi kad prirast funkcije postaje sve manji?



Neka je točka $T(x_0, f(x_0))$ odabrana točka grafa. Odaberimo na grafu i točku $Q(x_1, f(x_1))$ pri čemu je $x_1 = x_0 + \Delta x$ i $f(x_1) = f(x_0+\Delta x)$.
Pravcem kroz točke T i Q određena je sekanta kojoj je koeficijent smjera $k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Zamislimo da se točka Q giba po grafu funkcije prema točki T. Što se događa sa sekantom? Ona prolazi nizom sekanti $s_1, s_2, \ldots s_i, \ldots$ da bi u trenutka kada Q padne u T postala tangentom.

Zaključujemo:
Granični je položaj sekante kada $Q \to T$ tangenta, što znači da je granična vrijednost koeficijenta smjera sekante, kad $x_i \to x_0$ ($\Delta x \to 0$), jednaka koeficijentu smjera tangente u točki $T(x_0, f(x_0))$. Dakle:

$$k_t = \lim_{\Delta x \to 0} k_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

4.3. DERIVACIJA FUNKCIJE

Problem određivanja brzine u trenutku t i određivanja tangente u točki T vode prema određivanju kvocijenta $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kada $\Delta x \to 0$, tj. izračunavanje granične vrijednosti $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Postupak određivanja ovog limesa naziva se **deriviranje**.

Neka je f neprekidna funkcija na otvorenom intervalu I i neka je $x_0 \in I$ i Δx prirast argumenta takav da je $x_0 + \Delta x \in I$.
Derivacija funkcije f u točki x_0 je broj:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

ako taj limes postoji.

derivacija funkcije u točki

Za funkciju koja ima derivaciju u točki x_0 kažemo da je **derivabilna** ili **diferencijabilna u toj točki**.
Funkcija je **diferencijabilna na intervalu** I ako ima derivaciju u svakoj točki tog intervala.

Za označavanje derivacije funkcije, osim navedene oznake koju je uveo Lagrange, koje koristimo i oznake:

- $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$ (uveo Leibniz),
- $\dot{y} = \dot{f}(x)$ (uveo Newton),
- $Dy = Df(x)$ (uveo Cauchy).

4.4. ODREĐIVANJE DERIVACIJE

4.4.1. ODREĐIVANJE DERIVACIJE FUNKCIJE PO DEFINICIJI

Pokazat ćemo najprije kako se računa derivacija funkcije u točki po definiciji za neke elementarne funkcije.

Primjer Odredimo derivaciju funkcije f u točki x po definiciji:

derivacija funkciju po definiciji

a) $f(x)=c$, c konstanta

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0.$$

Zapamtimo: Derivacija konstante jednaka je nuli.

b) $f(x)=x$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1,$$

c) $f(x)=ax+b$, $a,b\in \mathrm{R}$, $a\neq 0$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a(x+\Delta x)+b-(ax+b)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\Delta x}{\Delta x}=a$$

d) $f(x)=x^2$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x,$$

e) $f(x)=x^{-2}$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{-2}-x^{-2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2}-\frac{1}{x^2}}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{-2x\Delta x-(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x-\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}=-\frac{2}{x^3}=-2x^{-3},$$

f) $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Možemo dokazati da vrijedi sljedeća **tablica derivacija elementarnih funkcija**:

tablica deriviranja osnovnih funkcija

$f(x)$	$f'(x)$
c (konstanta)	0
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
a^x	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

4.4.2. PRAVILA DERIVIRANJA

Neka su f i g diferencijabilne funkcije. Tada vrijedi:

1. derivacija zbroja (razlike) funkcija:	$(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$
2. derivacija umnoška funkcija:	$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+ f(x)\cdot g'(x)$
3. derivacija umnoška konstantom:	$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$
3. derivacija kvocijenta: $g(x)\neq 0$ $f(x)\neq 0$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)- f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$ $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$

pravila deriviranja

Primjer Odredimo derivacije funkcija:

a) $f(x) = 2x + \cos\frac{\pi}{4}$

$$f'(x) = 2(x)' + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)' = 2 + 0 = 2,$$

b) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 9x + \frac{5}{101}$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - 9x + \frac{5}{101}\right)' = \frac{3}{2}\left(x^2\right)' - 9(x)' + \left(\frac{5}{101}\right)' = 3x - 9,$$

c) $f(x) = 16x^2 - 8\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 16\left(x^2\right)' - 8\left(\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 32x - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2},$$

d) $f(x) = (3-4x)\left(x^2 - 3x + 1\right)$

$$f'(x) = (3-4x)'\left(x^2 - 3x + 1\right) + (3-4x)\left(x^2 - 3x + 1\right)' =$$
$$= -4\left(x^2 - 3x + 1\right) + (3-4x)(2x-3) = -12x^2 + 30x - 3,$$

e) $f(x) = x \cdot \sin x$

$$f'(x) = (x)' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x\cos x,$$

f) $f(x) = (x+1) \cdot e^x$

$$f'(x) = (x+1)' \cdot e^x + (x+1)\left(e^x\right)' = 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x = e^x(2+x),$$

g) $f(x) = \frac{2x}{3-x}$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{3-x}\right)' = \frac{(2x)' \cdot (3-x) - 2x \cdot (3-x)'}{(3-x)^2} = \frac{2(3-x) - 2x \cdot (-1)}{(3-x)^2} = \frac{6}{(3-x)^2},$$

h) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x-3}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 6x + 5}{x-3}\right)' = \frac{\left(x^2 - 6x + 5\right)' \cdot (x-3) - \left(x^2 - 6x + 5\right) \cdot (x-3)'}{(x-3)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{\left(2x^2 - 6\right) \cdot (x-3) - \left(x^2 - 6x + 5\right) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 13}{(x-3)^2},$$

i) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

j) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)' = \frac{(\sin x-\cos x)'\cdot(\sin x-3)-(x^2-6x+5)\cdot(x-3)'}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{(\sin x-\cos x)'\cdot(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)\cdot(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)\cdot(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)\cdot(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}.$$

4.5. DERIVACIJA KOMPOZICIJE FUNKCIJE (DERIVACIJA SLOŽENE FUNKCIJE)

Neka je $(f\circ g)$ kompozicija dviju diferencijabilnih funkcija. Tada vrijedi:

derivacija složene funkcije

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x),$$

što još zapisujemo i:

$$(f(g(x)))' = f'(u)\cdot g'(x), \text{ gdje je } u=g(x).$$

Ova se formula naziva i **pravilo o ulančanom deriviranju**.
Pravilo možemo iskazati riječima: složena se funkcija derivira tako da se derivacija „vanjske“ funkcije pomnoži s derivacijom „unutarnje“. Kada deriviramo „vanjsku“ funkciju, u dobivenoj derivaciji prepisujemo „unutarnju“ funkciju.

pravilo o ulančanom deriviranju

Primjer 1. Odredimo derivaciju zadanih funkcija:

a) $f(x)=(x-5)^4$
Ovdje je $f(u)=u^4$, $u=g(x)=x-5$. Prema pravilu imamo:
$f'(x)=f'(u)\cdot g'(x)=\left(u^4\right)'\cdot(x-5)'=4u^3\cdot 1=4(x-5)^3$

ili kraće, ne ispisujući funkcije koje treba derivirati:

$$f'(x)=\left((x-5)^4\right)'=4(x-5)^3\cdot(x-5)'=4(x-5)^3.$$

b) $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$
Ovdje je $f(u)=\sqrt{u}$, $u=g(x)=x^2+3x$. Prema pravilu imamo:

$$f'(x) = f'(u)\cdot g'(x) = \left(\sqrt{u}\right)' \cdot \left(x^2+3x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x+3) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$$

ili kraće, ne ispisujući funkcije koje treba derivirati:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+3x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x}}\cdot\left(x^2+3x\right)' = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}.$$

c) $f(x) = \sin 2x$

$f'(x) = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x$,

d) $f(x) = \sin^2 x$

$f'(x) = \left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x$,

e) $f(x) = \cos(5x-1)$

$f'(x) = (\cos(5x-1))' = -\sin(5x-1)\cdot(5x-1)' = -5\sin(5x-1)$,

f) $f(x) = e^{-x^2+3}$

$f'(x) = \left(e^{-x^2+3}\right)' = e^{-x^2+3}\cdot\left(-x^2+3\right)' = -2xe^{-x^2+3}$,

g) $f(x) = \log_5(x-1)$

$f'(x) = (\log_5(x-1))' = \dfrac{1}{(x-1)\ln 5}\cdot(x-1)' = \dfrac{1}{(x-1)\ln 5}$.

Primjer 2. Odredimo derivacije funkcija:

a) $f(x) = 4^x - 2e^{x^3}$

$f'(x) = \left(4^x - 2e^{x^3}\right)' = \left(4^x\right)' - 2\left(e^{x^3}\right)' = 4^x \ln 4 - 2e^{x^3}\cdot\left(x^3\right)' = 4^x \ln 4 - 6xe^{x^3}$,

b) $f(x) = \log\left(x^2+2\right)\cdot\cos 3x$

$$f'(x) = \left(\log\left(x^2+2\right)\cdot\cos 3x\right)' = \left(\log\left(x^2+2\right)\right)'\cdot\cos 3x + \log\left(x^2+2\right)\cdot(\cos 3x)' =$$

$$= \frac{1}{\left(x^2+2\right)\ln 10}\cdot\left(x^2+2\right)'\cdot\cos 3x + \log\left(x^2+2\right)\cdot(-\sin 3x)(3x)' =$$

$$= \frac{2x}{\left(x^2+2\right)\ln 10}\cdot\cos 3x - 3\log\left(x^2+2\right)\cdot\sin 3x,$$

c) $f(x) = \ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

$$f'(x) = \left(\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)' = \frac{1}{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\cdot\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)' = \frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{2x\left(1-x^2\right)-\left(1+x^2\right)\cdot(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{4x}{1-x^4}.$$

4.6. DERIVACIJA VIŠEG REDA

Neka je f funkcija koja ima derivaciju u nekoj točki intervala I. Funkcija f' može imati svoju derivaciju. Za derivaciju te funkcije kažemo da je druga derivacija funkcije f i pišemo:

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

Potpuno analogno definiramo i **derivacije višeg reda**:

derivacija višeg reda

$$f'''(x) = [f''(x)]', \quad f^{(4)}(x) = [f'''(x)]', \ \ldots$$
$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]'.$$

Primjer 1. Odredimo treću derivaciju $f(x) = 2x^2 - \cos x$.

$$f'(x) = \left(2x^2 - \cos x\right)' = 4x + \sin x,$$
$$f''(x) = (4x + \sin x)' = 4 + \cos x,$$
$$f'''(x) = (4 + \cos x)' = -\sin x.$$

Primjer 2. Odredimo petu derivaciju: $f(x) = x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 5x + 3$.

$$f'(x) = \left(x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 5x + 3\right)' = 4x^3 - 21x^2 - 12x + 5,$$
$$f''(x) = \left(4x^3 - 21x^2 - 12x + 5\right)' = 12x^2 - 42x - 12,$$
$$f'''(x) = \left(12x^2 - 42x - 12\right)' = 24x - 42,$$
$$f^{(4)}(x) = (24x - 42)' = 24,$$
$$f^{(5)}(x) = (24)' = 0.$$

4.7. JEDNADŽBA TANGENTE I NORMALE

U poglavlju 4.2. zaključili smo:
Granični je položaj sekante kada $Q \to T$ tangenta, što znači da je granična vrijednost koeficijenta smjera sekante, kad $\Delta x \to 0$, jednaka koeficijentu smjera tangente u točki $T(x_0, f(x_0))$. Dakle:

$$k_t = \lim_{\Delta x \to 0} k_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

U poglavlju 4.3. definirali smo derivaciju funkciju f u točki x_0 kao broj:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Sada možemo zapisati **jednadžbu tangente** krivulje $y = f(x)$ u točki $T(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

jednadžba tangente

Jednadžba normale u točki $T(x_0, y_0)$ glasi: $y - y_0 = \frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)$.

jednadžba normale

Primjer Odredimo jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = e^{x+1}$ u točki $T(-1, y)$.

Ordinatu točke T određujemo iz podatka da točka T pripada grafu funkcije: $y = e^{-1+1} = e^0 = 1$, tj. $T(-1,1)$.
Derivacija zadane funkcije je $f'(x) = e^{x+1}$ pa imamo: $f'(x_0) = f'(-1) = e^{-1+1} = 1$.
Prema formuli jednadžbe tangente $y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, jednadžba tražene tangente glasi $y - 1 = x + 1 \Rightarrow y = x + 2$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Odredite derivaciju funkcija:

a) $f(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + 3}{4x - 5}$,

b) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x}$,

c) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} - ctgx \cdot \sin x$,

d) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - (5 - 2x)\cdot(x^3 + 4x - 2)$,

e) $f(x) = 5^x \cdot \ln x - e^x \cdot \log_5 x$,

f) $f(x) = \log_7 x \cdot x^7 + 7^x \cdot e^x$,

g) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 2x^{-5}} + 3\sqrt[3]{3}$,

h) $f(x) = (2\sin x - x^{-5})^5 + 5\sqrt{5}$,

i) $f(x) = \ln\frac{\cos x - x}{\cos x + x}$,

j) $f(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}}$,

k) $f(x) = \ln^4 x + \sin\sqrt{x} - 3e^{3x^2 - 3} + \cos\frac{\pi}{4}$,

l) $f(x) = \left(\ln\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right)^2$,

m) $f(x) = \ln\sin\sqrt{10x^2 - \sqrt{2}}$.

2. Odredite derivaciju funkcije u točki:

a) $f(x) = e^x \cdot \cos 2x$ u točki $x_0 = \frac{\pi}{2}$,

b) $f(x) = \cos(\ln x)\cdot\sin(\ln x)$ u točki $x_0 = 1$,

c) $f(x) = -4ctg^3 x$ u točki $x_0 = \frac{\pi}{4}$,

d) $f(x) = \log(x^2 + 1)$ u točki $x_0 = 0$.

3. Odredite derivaciju višeg reda:

a) $f^{(5)}(x)$ ako je $f(x)=\sin x$,

b) $f^{(5)}(x)$ ako je $f(x)=5-2x-3x^3+x^4$,

c) $f''(x)$ ako je $f(x)=x^2\cdot e^x$,

d) $f'''(x)$ ako je $f(x)=\ln(2x+3)$,

e) $f''(x)$ ako je $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$,

f) $f''(x)$ ako je $f(x)=e^{x^2-x}$,

g) $f^{(4)}(x)$ ako je $f(x)=e^x\cdot\cos x$,

h) $f''(x)$ ako je $f(x)=(x^2-3x)^4$.

4. Odredite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije $f(x)=\dfrac{2+4x}{2-4x}$ u točki s ordinatom $-\dfrac{1}{3}$.

5. Odredite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije $f(x)=\sqrt{x^2+x+2}$ u točki s ordinatom 2.

5. PRIMJENE DIFERENCIJALNOG RAČUNA

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
Kako i gdje primjenjujemo derivaciju funkcije? Što o funkciji možemo istražiti pomoću derivacije?
Kako nacrtati graf složenih funkcija?

5.1. PAD I RAST FUNKCIJE. EKSTREMI FUNKCIJE

5.1.1. PAD I RAST FUKCIJE. INTERVALI MONOTONOSTI

U poglavlju 3.2.1. definirali smo rastuće i padajuće funkcije, tj. monotone funkcije i intervale monotonosti. Ovdje ćemo upotrijebiti prvu i drugu derivaciju za analizu geometrijskih osobina funkcija, na početku za analizu rasta i pada funkcije.

Prva deriacija funkcije f u točki $T(x_0, f(x_0))$ daje informaciju o koeficijentu smjera tangente u toj točki, a njegov nam predznak daje informaciju o rastu ili padu funkcije.

Neka je funkcija f derivabilna na intervalu $\langle a,b\rangle$. Tada vrijedi:

- Funkcija f je **rastuća (strogo rastuća)** na intervalu $\langle a,b\rangle$ ako i samo ako je $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)>0$) za svaki $x\in\langle a,b\rangle$.
- Funkcija f je **padajuća (strogo padajuća)** na intervalu $\langle a,b\rangle$ ako i samo ako je $f'(x)\leq 0$ ($f'(x)<0$) za svaki $x\in\langle a,b\rangle$.

rast i pad funkcije

Točku x_0 u kojoj je vrijednost derivacije funkcije jednaka nuli, tj. $f'(x_0)=0$, nazivamo **stacionarnom točkom**.

stacionarna točka

Primjer Odredimo stacionarne točke i intervale monotonosti funkcije $f(x)=3x^4-4x^3+3$.

Derivacija funkcije je $f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$. Stacionarne točke su rješenja jednadžbe $f'(x_0)=0$, tj. jednadžbe $12x^2(x-1)=0$. Dobivamo dvije stacionarne točke $x=0$ i $x=1$.
Tijek funkcije možemo opisati tablicom:

x	$\langle -\infty,0\rangle$	0	$\langle 0,1\rangle$	1	$\langle 1,\infty\rangle$
$f'(x)$	-		-		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Iz tablice čitamo da je funkcija pada na intervalu $\langle -\infty,1\rangle$, a raste na intervalu $\langle 1,\infty\rangle$.

5.1.2. LOKALNI EKSTREMI

Kažemo da je točka x_0 **lokalni minimum** funkcije f ako postoji interval $\langle a,b\rangle$ koji sadrži x_0 tako da vrijedi $f(x_0)<f(x)$ za svaki $x\in\langle a,b\rangle$.

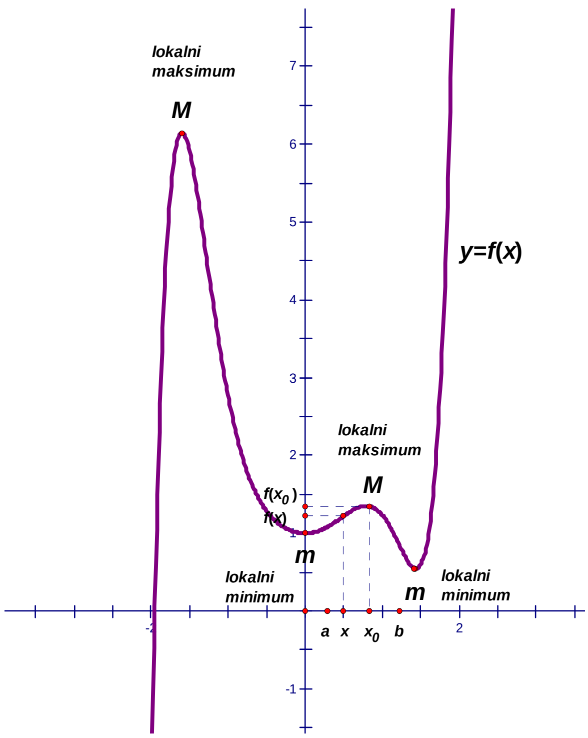
lokalni minimum

Kažemo da je točka x_0 **lokalni maksimum** funkcije f ako postoji interval $\langle a,b\rangle$ koji sadrži x_0 tako da vrijedi $f(x_0)>f(x)$ za svaki $x\in\langle a,b\rangle$.

lokalni maksimum

Ako funkcija ima lokalni minimum ili lokalni maksimum u točki x_0, kažemo da funkcija ima **lokalni ekstrem** u točki x_0.

lokalni ekstrem



Nužan uvjet za lokalni ekstrem daje poučak (P. Fermat):
Neka funkcija $f:\langle a,b\rangle \to R$ ima lokalni ekstrem u točki $x_0 \in \langle a,b\rangle$. Ako postoji $f'(x_0)$, onda je $f'(x_0)=0$.

Stacionarne točke i točke u kojima ne postoji derivacija funkcije su **kandidati za lokalni ekstrem**.

traženja lokalnih ekstrema

Traženje lokalnih ekstrema:

- odredimo stacionarne točke funkcije f,
- odredimo intervale monotonosti,
- ako je x_0 stacionarna točka, onda njezin karakter određujemo na temelju rasta ili pada funkcije lijevo i desno od te točke.

Zapamtimo:
Ako funkcija f ima stacionarnu točku x_0, tada funkcija ima:

- lokalni maksimum u točki x_0 ako f' mijenja predznak iz pozitivnog u negativni,
- lokalni minimum u točki x_0 ako f' mijenja predznak iz negativnog u pozitivni.

Primjer Odredimo lokalne ekstreme funkcije: $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2+1$.

Odredimo stacionarne točke. Derivacija funkcije je $f'(x)=x^3+x^2-2x$, odnosno $f'(x)=x(x-1)(x+2)$. Iz $f'(x)=0$ nalazimo da funkcija ima tri stacionarne točke $x=-2$, $x=0$ i $x=1$. Uočimo predznake u okolinama stracionarnih točkaka i opišimo tok funkcije tablicom:

x	$\langle -\infty,-2\rangle$	- 2	$\langle -2,0\rangle$	0	$\langle 0,1\rangle$	1	$\langle 1,\infty\rangle$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{7}{12}$	$\nearrow$

Za $x=-2$ funkcija ima lokalni minimum koji iznosi $-\frac{5}{3}$, za $x=0$ funkcija ima lokalni maksimum koji iznosi 1, a za $x=1$ funkcija ima lokalni minimum koji iznosi $\frac{7}{12}$.

Pogledajmo ***Primjer*** u prethodnom poglavlju. Stacionarne točke funkcije $f(x)=3x^4-4x^3+3$ su točke $x=0$ i $x=1$, ali točka $x=0$ nije ekstrem funkcije.

5.1.3. GLOBALNI EKSTREMI

Ako želimo odrediti najveću ili najmanju vrijednost na zatvorenom intervalu $[a,b]$, onda govorimo o **globalnim ekstremima**.

globalni ekstremi

Ako je funkcija diferencijabilna na zatvorenom intervalu $[a,b]$, onda ona postiže globalni ekstrem:

- ili u rubnim točkama intervala
- ili u stacionarnim točkama.

Ako funkcija ima prekid, onda globalni ekstrem može poprimiti i u točki prekida.

Primjer Odredimo najveću i najmanju vrijednost funkcije $f(x)=1-2x-x^2$ na intervalu $[-2,2]$.

Derivacija funkcije je $f'(x)=-2-2x$. Iz $f'(x)=0$ slijedi da je $x=-1$ stacionarna točka. Kandidati za globalne ekstreme su rubne točke zadanog intervala i stacionarna točka. Izdvojimo vrijednosti funkcije u tim točkama:

x	$f(x)$
- 2	1
- 1	2
2	- 7

Zaključujemo da funkcija ima najveću vrijednost 2 u točki lokalnog ekstrema $x=-1$, a najmanju vrijednost – 7 u desnom rubu intervala $x=2$.

5.1.4. DRUGA DERIVACIJA I EKSTREMI

Dovoljan uvjet za postojanje ekstrema možemo izraziti i pomoću druge derivacije.

druga derivacija i ekstremi

Ispitivanje karaktera ekstrema pomoću druge derivacije:

- izračunamo f' i f'',
- riješimo jednadžbu $f'(x)=0$ (njezina rješenja su stacionarne točke x_0),
- ako je $f''(x_0)>0$, onda funkcija f ima minimum u točki x_0,
- ako je $f''(x_0)<0$, onda funkcija f ima maksimum u točki x_0,
- ako je $f''(x_0)=0$, onda karakter točke x_0 istražujemo pomoću prve derivacije.

Primjer Odredimo ekstreme funkcije $f(x)=2x^3-15x^2+24x+2$.

Derivacija funkcije je $f'(x)=6x^2-30x+24=6(x^2-5x+4)$. Iz $f'(x)=0$ dobivamo stacionarne točke $x=1$ i $x=4$. Prema opisanom kriteriju koji se koristi drugom derivacijom, dovoljno je za svaku stacionarnu točku odrediti predznak druge derivacije. Najprije je $f''(x)=12x-30$, a onda:
$f''(1)=12\cdot 1-30=-18<0$ pa funkcija u točki $x=1$ ima lokalni maksimum koji iznosi $f(1)=13$ i
$f''(4)=12\cdot 4-30=18>0$ pa funkcija u točki $x=4$ ima lokalni minimum koji iznosi $f(4)=-14$.

5.2. KONVEKSNOST I KONKAVNOST

Neka u točki $T(x_0, f(x_0))$ grafa funkcije $y=f(x)$ postoji tangenta.

konveksna funkcija

Funkcija f je **konveksna** na intervalu $\langle a,b\rangle$ ako graf funkcije leži iznad tangente u po volji odabranoj točki intervala.

konkavna funkcija

Funkcija f je **konkavna** na intervalu $\langle a,b\rangle$ ako graf funkcije leži ispod tangente u po volji odabranoj točki intervala.

intervali zakrivljenosti

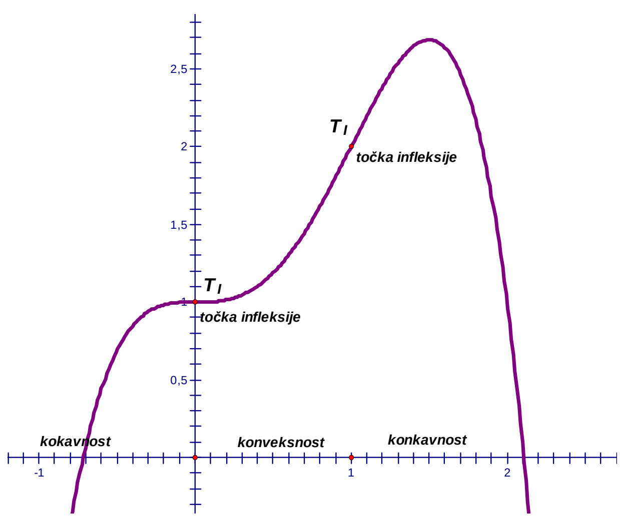
Intervale koveksnosti i konkavnosti nazivamo **intervalima zakrivljenosti**.

Konveksnost i konkavnost funkcije provjeravamo pomoću druge derivacije:

- Funkcija f je konveksna na intervalu $\langle a,b\rangle$ ako za svaki $x\in\langle a,b\rangle$ vrijedi $f''(x)>0$.
- Funkcija f je konkavna na intervalu $\langle a,b\rangle$ ako za svaki $x\in\langle a,b\rangle$ vrijedi $f''(x)<0$.

točka infleksije

Točka u kojoj konveksnost prelazi u konkavnost ili obrnuto naziva se **točka pregiba** ili **točka infleksije**.



Intervale konveksnosti i konkavnosti i točke infleksije određujemo na sljedeći način:

- izračunamo f'',
- riješimo jednadžbu $f''(x)=0$ (njezina rješenja su moguće točke pregiba),
- na intervalima na kojima je $f''(x)>0$, funkcija je konveksna, na ostalima je konkavna, a na granici između intervala konveksnosti i konkavnosti nalazi se točka infleksije.

određivanje točaka infleksije i intervala zakrivljenosti

Primjer Odredimo intervale konveksnosti i konkavnosti i točke infleksije ako je $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

Prva derivacija funkcije je $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, a druga derivacija $f''(x)=\dfrac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$. Iz $f''(x)=0$ slijedi da su kandidati za točke infleksije $x=0$ i $x=\pm\sqrt{3}$. Tražene intervale čitamo iz tablice:

x	$\langle -\infty,-\sqrt{3}\rangle$	$-\sqrt{3}$	$\langle -\sqrt{3},0\rangle$	0	$\langle 0,\sqrt{3}\rangle$	$\sqrt{3}$	$\langle \sqrt{3},\infty\rangle$
f''	-	0	+	0	-	0	+
f	konkavna	inf	konveksna	Inf	konkavna	Inf	konveksna

Funkcija je konveksna na $\langle -\sqrt{3},0\rangle \cup \langle \sqrt{3},\infty\rangle$, a konkavna na $\langle -\infty,-\sqrt{3}\rangle \cup \langle 0,\sqrt{3}\rangle$. U točkama $x=0$, i $x=\sqrt{3}$ funkcija ima točke infleksije.

5.3. ASIMPTOTE GRAFA FUNKCIJE

Neka se točka T neprekidno giba po grafu Γ_f funkcije f tako da barem jedna od njezinih koordinata teži u $-\infty$ ili ∞. Ako pri tome njezina udaljenost od pravca $y=kx+l$ teži k nuli, onda taj pravac nazivamo **asimptotom** funkcije *f*. Asimptota je pravac kojemu se graf funkcije približava, ali ga nikada ne siječe.

asimptota

Vrste asimptota:

vrste asimptota

- **vertikalne asimptote**
  Ako za funkciju f vrijedi $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$, onda je pravac $x=c$ njezina vertikalna asimptota.

- **horizontalne asimptote**
  Ako postoji $l=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, onda je pravac $y=l$ desna horizonzalna

asimptota, a ako postoji $l = \lim_{x \to -\infty} f(x)$, onda je pravac $y = l$ lijeva horizonzalna asimptota.

Horizontalne asimptote imaju koeficijent smjera $k = 0$. Općenitije:

- **kose asimptote**
  Desna (lijeva) kosa asimptota je pravac $y = kx + l$ za koji vrijedi:
  $\lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} [f(x) - kx - l] = 0$, gdje je $k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ i $l = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx]$.

5.4. CRTANJE GRAFA FUNKCIJE

koraci pri crtanju grafa funkcije

Da bismo nacrtali graf funkcije, korisno je obratiti pažnju na sljedeće:
1. odrediti područje definicije funkcije,
2. odrediti sjecišta grafa funkcije s koordinatnim osima,
3. uočiti parnost, neparnost, odnosno periodičnost funkcije,
4. odrediti asimptote funkcije,
5. odrediti prvu derivaciju funkcije, intervale monotonosti, stacionarne točke, odnosno ekstreme funkcije,
6. odrediti drugu derivaciju funkcije, intervale konveksnosti i konkavnosti i točke infleksije.

Primjer 1. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = \frac{6x^2 - x^4}{9}$.

1. Domena funkcije skup je svih realnih brojeva.
2. Nultočke funkcije rješenja su jednadžbe $6x^2 - x^4 = 0$. To su $x = 0$ i $x = \pm\sqrt{6}$. Graf funkcije siječe os x u točkama $\left(-\sqrt{6}, 0\right)$, $(0,0)$ i $\left(\sqrt{6}, 0\right)$. Os y siječe u toči $(0,0)$.
3. $f(-x) = \frac{6(-x)^2 - (-x)^4}{9} = \frac{6x^2 - x^4}{9} = f(x)$ pa zaključujemo da je funkcija parna, odnosno njezin je graf simetričan s obzirom na os y.
   Funkcija nije periodična.
4. Funkcija nema asimptota.
5. $f'(x) = \frac{4}{9}x\left(3 - x^2\right)$ pa su stacionarne točke $x = 0$ i $x = \pm\sqrt{3}$. Imamo:

x	$\langle -\infty, -\sqrt{3} \rangle$	$-\sqrt{3}$	$\langle -\sqrt{3}, 0 \rangle$	0	$\langle 0, \sqrt{3} \rangle$	$\sqrt{3}$	$\langle \sqrt{3}, \infty \rangle$
f'	-	0	+	0	-	0	+
f	$\searrow$	1	$\nearrow$	0	$\searrow$	1	$\nearrow$

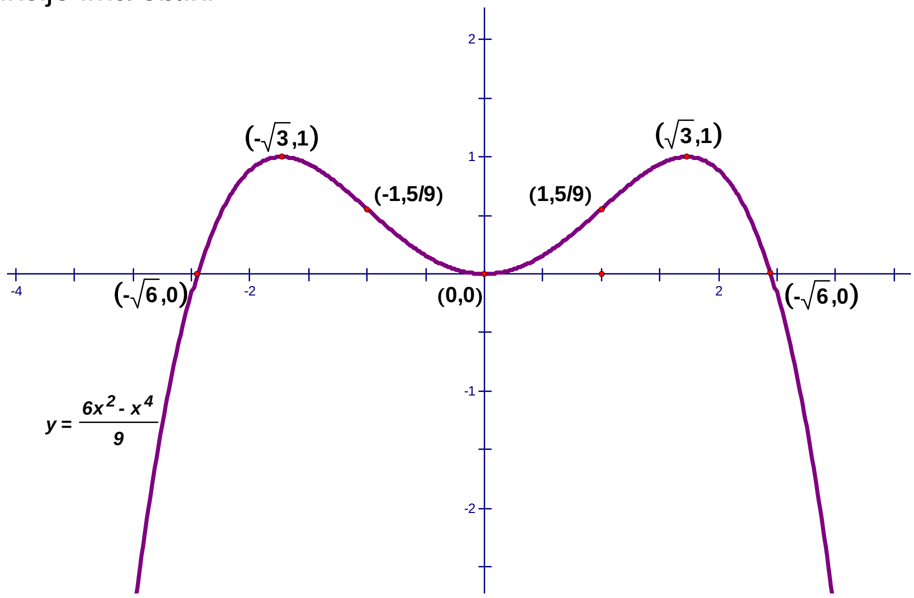
Točke $T\left(-\sqrt{3}, 1\right)$ i $T\left(\sqrt{3}, 1\right)$ su točke maksimuma, a točka $T(0,0)$ točka minimuma.

6. $f''(x) = \frac{4}{3}\left(1 - x^2\right)$ pa su kandidati za točke infleksije $x = \pm 1$. Imamo:

x	$\langle -\infty, -1\rangle$	-1	$\langle -1, 1\rangle$	1	$\langle 1, \infty\rangle$
f''	-	0	$+$	0	-
f	konkavna	$\frac{5}{9}$ inf	konveksna	$\frac{5}{9}$ inf	konkavna

Točke infleksije su $T\left(-1, \frac{5}{9}\right)$ i $T\left(1, \frac{5}{9}\right)$.

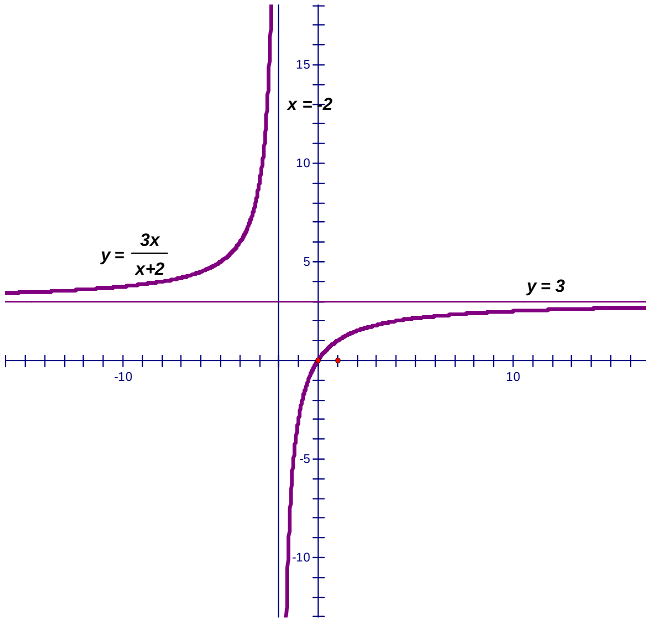
Graf funkcije ima oblik:



Primjer 2. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = \dfrac{3x}{x+2}$.

1. Domena funkcije je skup: $\mathbf{R} \backslash \{-2\}$ jer mora biti $x \neq -2$.
2. Nultočka funkcije je rješenje jednadžbe $3x = 0$, tj. $x = 0$. Graf funkcije siječe os x u točki $(0,0)$. Ujedno je to i sjecište s osi y.
3. $f(-x) = \dfrac{-3x}{-x+2}$ pa zaključujemo da funkcija nije ni parna ni neparna.
   Funkcija nije periodična.
4. $x = -2$ je vertikalna asimptota.
   $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x}{x+2} = 3$ pa je pravac $y = 3$ horizontalna asimptota funkcije.
   Kosih asimptota nema (jer ima horizontalnih).
5. $f'(x) = \dfrac{6}{(x+2)^2} > 0$ pa funkcija nema stacionarnih točaka, odnosno nema ekstrema. Funkcija je rastuća na cijeloj domeni.
6. $f''(x) = \dfrac{-12}{(x+2)^3} \neq 0$ pa nema točaka infleksije.
   Rješenja nejednadžbe $f''(x) > 0$ daje interval $\langle -\infty, -2\rangle$ na kojemu je funkcija konveksna, a rješenja nejednadžbe $f''(x) < 0$ daje interval $\langle -2, \infty\rangle$ na kojemu je funkcija konkavna.

Graf funkcije ima oblik:



Primjer 3. Nacrtajmo graf funkcije $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

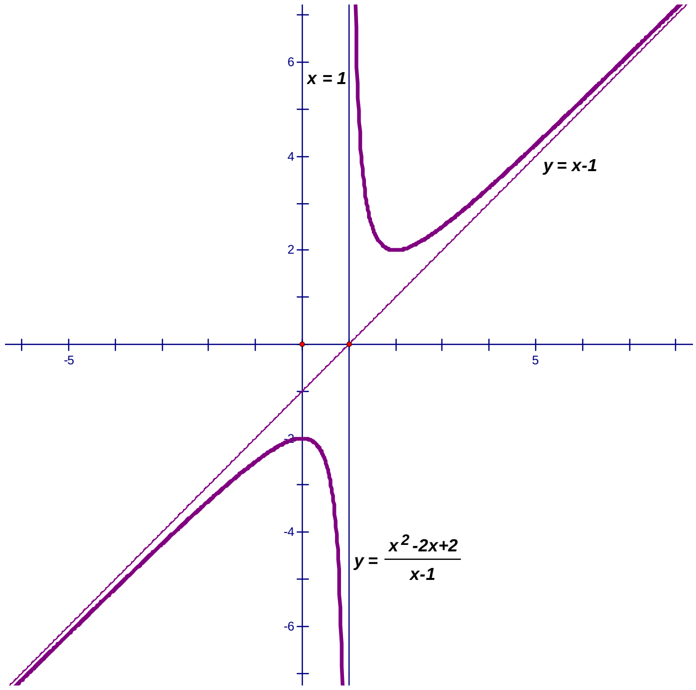
Odredimo ovdje asimptote zadane funkcije, a preostalo napravite za vježbu.

$x=1$ je vertikalna asimptota funkcije.

Horizontalnih asimptota nema jer je $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=\pm\infty$.

Kosa asimptota je pravac $y=kx+l$ gdje je:

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-x}=1$ i $l=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x+2}{x-1}=-1$. Dakle, pravac $y=x-1$.



ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Odredite stacionarne točke i intervale monotonosti zadanih funkcija:

a) $f(x)=x^3-2x^2+x-2$,

b) $f(x)=x^4+4x-6$,

c) $f(x)=x-\ln x$,

d) $f(x)=x\cdot 2^{-x}$,

e) $f(x)=8x^2-\ln x$.

2. Odredite lokalne ekstreme zadanih funkcija:

a) $f(x)=2x^2+3x+4$,

b) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+1$,

c) $f(x)=\frac{1}{x}+4x^2$,

d) $f(x)=x\cdot e^x$,

e) $f(x)=\ln(x^2+1)$,

f) $f(x)=(\ln x)^2$.

3. Odredite globalne ekstreme zadanih funkcija:

a) $f(x)=(x-3)^2$ na intervalu $[0,4]$,

b) $f(x)=x^3-12x-5$ na intervalu $[-1,3]$,

c) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ na intervalu $[-2,2]$,

d) $f(x)=\sqrt{x-4}$ na intervalu $[4,29]$.

4. Odredite točke pregiba i intervale zakrivljenosti zadanih funkcija:

a) $f(x)=x^3+x-1$,

b) $f(x)=(x-1)^3+2$,

c) $f(x)=\frac{1}{x+2}$,

d) $f(x)=xe^{-2x}$,

e) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$.

5. Odreditte ekstreme funkcija koristeći se drugom derivacijom:

a) $f(x)=x^3-6x+1$,

b) $f(x)=xe^{3x}$,

c) $f(x)=x+\frac{4}{x}$,

d) $f(x)=x^2-2\ln x$,

e) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+2}$,

f) $f(x)=e^x-2x$.

6.Nacrtajte graf funkcija:

a) $f(x)=x^3-3x+5$,

b) $f(x)=x^4-8x^2+10$,

c) $f(x)=5(x^4-10x^2+9)$,

d) $f(x)=\frac{2x-1}{x-4}$,

e) $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$,

f) $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$,

g) $f(x)=\frac{4x}{4-x^2}$,

h) $f(x)=xe^{-x}$.

KONTROLNA ZADAĆA – ZADACI ZA SAMOPROVJERU ZNANJA

PRIMJER PISANOG ISPITA ZNANJA IZ MATEMATIKE

1. Riješi jednadžbe:

   a) $\frac{n!}{(n-5)!}=\frac{20n!}{(n-3)!}$, b) $2\binom{n}{n-4}=\binom{n+1}{n-3}$.

2. a) Prikaži pomoću binomne formule $\left(x^5-2x^2\right)^5=$

   b) Koji član u razvoju binoma $\left(a\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^{11}$ ne sadrži a?

3. Izračunaj:

   a) $z_1\cdot\overline{z_2}$ ako je $z_1=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ i $z_2=-1-i$,

   b) $\frac{z_1^{19}}{z_2}$ ako je $z_1=3\sqrt{3}+3i$ i $z_2=-6$,

   c) $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.

4. Koliko članova aritmetičkog niza -16, -10, -4, ... treba zbrojiti da zbroj bude 1820?

5. Odredi a_1, q i n geometrijskog niza ako je $S_n=40$ i $\begin{matrix} a_6-a_4=216 \\ a_3-a_1=8 \end{matrix}$.

6. Odredi domenu funkcije $f(x)=\frac{1}{x^2-1}+\sqrt{2-x}-4\log\left(-3x^2+14x+5\right)$

7. Odredi kompozicije $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ i $g\circ g$ ako je $f(x)=3x^2-2$ i $g(x)=2x-5$.

8. Odredi inverznu funkciju funkcije $f(x)=4\log_3(x-1)+2$.

9. Izračunaj limese:

   a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{11-3n}{6n+4}\cdot\frac{10n^3+4n^2}{-5n^3-3n+2}\right)$, b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{16x^4+3}-4x}{\sqrt{2+4x^2}+\sqrt{2}}$, c) $\lim_{n\to\infty}\frac{13^n-3\cdot 2^n+5^n}{5^{n+3}+10\cdot 2^n-13^{n+1}}$,

   d) $\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-7x+3}{x^2-1}$, e) $\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+7}-2}{x^2-9}$.

10. Odredi derivaciju funkcija:

    a) $f(x)=\frac{x^5-2x^3+3}{4x-5}$, b) $f(x)=2\sqrt[3]{x}-\cos x\cdot\sin x$, c) $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}-2x^{-5}}+3\sqrt[3]{3}$,

    d) $f(x)=\ln\frac{x+tgx}{x-tgx}$, e) $f(x)=\sin\sqrt{x}-3e^{3x^2-3}+\cos\frac{\pi}{4}$.

11. Odredi jednadžbu tangente i normale na graf funkcije $f(x)=\frac{x-4}{1+2x}$ u točki s ordinatom 2.

12. Nacrtaj graf funkcije $f(x)=x^4-2x^2+1$.

KORIŠTENA LITERATURA:

D. Golubović, P. Javor, *Matematika* 4, udžbenik sa zbirkom zadataka za strukovne škole, I. i II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2007.