ŠKOLA ZA CESTOVNI PROMET
Zagreb

NASTAVNO PISMO
ZA PROGRAME OBRAZOVANJA ODRASLIH

Nastavni predmet:

MATEMATIKA

3. RAZRED

Zanimanje:

TEHNIČAR CESTOVNOG PROMETA

Autor: Marija Mlinarević, prof.

Zagreb, 2010.

KAKO KORISTITI NASTAVNO PISMO

Cijenjeni polaznici,

Svrha nastavnog pisma je olakšati Vam organizaciju samostalnog učenja, pripremanje i polaganje ispita te uspješno završavanje upisanog programa.

Na početku nastavnog pisma nalazi se sadržaj koji daje najkraći uvid u strukturu teksta, odnosno orijentacijski uvid u nastavne cjeline i jedinice koje su razrađene u nastavnom pismu i s kojima ćete se upoznati.

U razradi nastavnih cjelina definirani su novi pojmovi i objašnjena pravila i postupci koje koristimo u rješavanju zadataka. Slijedi niz detaljno objašnjenih primjera, popraćenih skicama i slikama, kroz koje uvježbavamo uvedeno. Pojmovi i pravila koje uvodimo, zbog lakšeg i bržeg snalaženja, istaknuti su na marginama. Prilikom učenja na margine možete zapisivati svoje osobne bilješke jer je nastavno pismo zamišljeno kao radni udžbenik.

Iza svake nastavne cjeline nalaze se zadaci za vježbu koje je dobro riješiti nakon proučenih primjera, posebno zato što se slični zadaci pojavljuju na ispitu. Na samome kraju nastavnog pisma nalazi se primjer ispita koji će Vam poslužiti za uvježbavanje gradiva i završnu samoprovjeru znanja. Sretno!

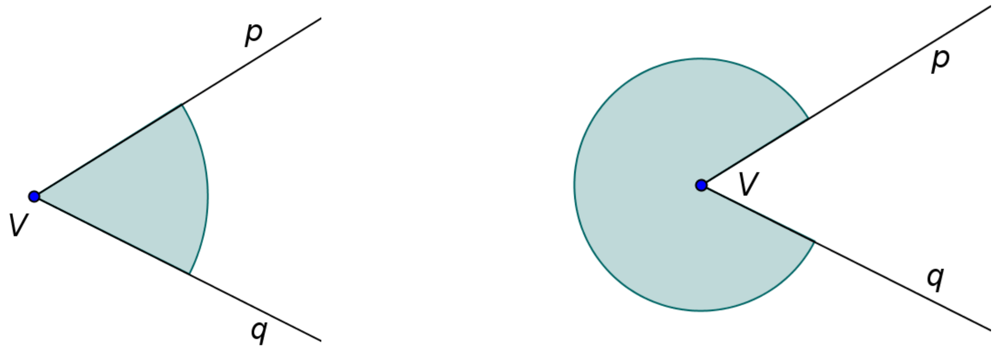
SADRŽAJ

1. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Što je kut? Kako proširujemo pojam kuta? Kako mjerimo kutove?*
2. *Kako definiramo trigonometrijske funkcije za po volji odabrani kut? Koja su njihova svojstva?*
3. *Kako računamo vrijednosti trigonometrijskih funkcija?*
4. *Koji identiteti povezuju trigonometrijske funkcije?*

1.1. KUT I MJERENJE KUTA

Dosada smo kut definirali kao dio ravnine omeđen dvama polupravcima (dvjema zrakama) sa zajedničkom početnom točkom.
Označavali smo ga $\angle pVq$. Pritom moramo posebno označiti (lukom ili na koji drugi način koji dio ravnine određen tim polupravcima mislimo:



Kutove možemo mjeriti. Mjere (veličine) kutova izražavamo mjernim brojem.
Mjere kutova najčešće označavamo slovima grčkog alfabeta: α, β, χ, …

Definirali smo jedinicu mjerenja **stupanj** (oznaka $1°$) i njezine dijelove **minuta** ($1'$) i **sekunda** ($1''$) pri čemu je:

stupanj

$$1° = 60',$$
$$1' = 60'',$$
$$1° = 3600''.$$

Po toj definiciji **puni kut** ima $360°$, **ispruženi** $180°$, **pravi** $90°$, **šiljasti kut** α: $0° < \alpha < 90°$, **tupi kut** β: $90° < \beta < 180°$, **izbočeni kut** χ: $180° < \chi < 360°$.

U mnogim problemima moramo dopustiti da kut ima mjeru veću od 360° ili da ona bude negativna. Zato ćemo morati proširiti pojam kuta i njegove mjere.

Zamislimo sada da se neka zraka vrti oko svoje početne točke V. Neka je njezin početni položaj zraka p, a završni zraka q. Pri toj vrtnji zraka je „prebrisala“ dio ravnine koji nazivamo kut i označavamo $\angle pVq$.

Kut je uređen par (p,q) dviju zraka koje imaju isti početak V. Točku V nazivamo **vrh kuta**, zraku p nazivamo **prvi krak** (ili **početni krak**), a zraku q **drugi krak** (ili **završni krak**) kuta $\angle pVq$.
Ovako definiran kut naziva se još i **orijentirani kut**.

orijentirani kut

vrh kuta

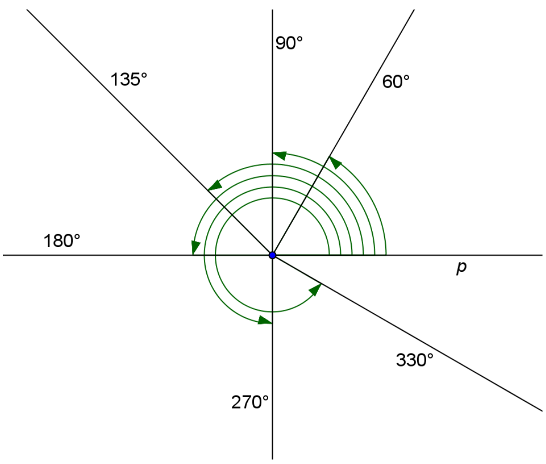
prvi krak

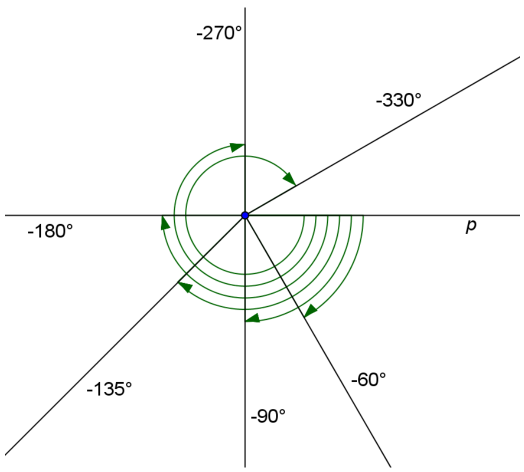
drugi krak

Ako iz početne zrake p kuta $\angle pVq$ dolazimo do završne zrake kuta q vrtnjom u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu, onda kažemo da se zraka vrti u **pozitivnom smjeru**. Mjera kuta dobivenog vrtnjom u pozitivnom smjeru je **pozitivna**.
Ako se pak vrtnja odvija u smjeru kretanja kazaljke na satu, tj. u **negativnom smjeru**, onda je mjera dobivenog kuta **negativna**.

pozitivna vrtnja

negativna vrtnja

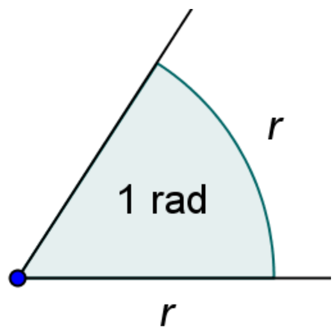




Osim stupnjeva možemo izabrati i drugu jedinicu mjerenja. Uobičajena je druga jedinica radijan.
Definirajmo jedinicu **radijan** (oznaka 1 rad):

Središnji kut kojemu je duljina pridruženog kružnog luka jednaka duljini polumjera kružnice je kut mjere **1 rad.**

radijan



Punom kutu je pridružen kružni luk jednak duljini kružnice. Duljina kružnice je $2r\pi$. Duljina luka koji je pridružen kutu mjere 1 rad je r. Dijeljenjem $2r\pi : r = 2\pi$, (odnosno odaberemo li polumjer kružnice za jedinicu mjerenja) dobijemo da puni kut ima 2π rad, odnosno da je:

$$360° = 2\pi \text{ rad.}$$

Slijedi:

$$180^\circ = \pi \text{ rad},$$
$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad},$$
$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad},$$
$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad},$$
$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}.$$

Iz $180^\circ = \pi$ rad dobivamo jednakost koja nam omogućava preračunavanje stupnjeva u radijane:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad},$$

odnosno ako je α mjera kuta u stupnjevima, njegovu mjeru u radijanima računamo po formuli:

preračunavanje stupnjeva u radijane

$$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ rad}.$$

Isto tako iz $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ slijedi:

$$1 \text{ rad } = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45'',$$

odnosno ako je α mjera kuta u radijanima, onda mjeru kuta u stupnjevima računamo po formuli:

preračunavanje radijana u stupnjeve

$$\alpha \text{ rad } = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha.$$

Primjer 1. Mjeru kuta u stupnjevima izrazimo u radijanima:

a) $150^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 150 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad},$

b) $72.36^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 72.36 = 1.26292 \text{ rad},$

c) $55^\circ 23' 32'' = 55.39\dot{2} = \frac{\pi}{180} \cdot 55.39\dot{2} = 0.96678 \text{ rad}.$

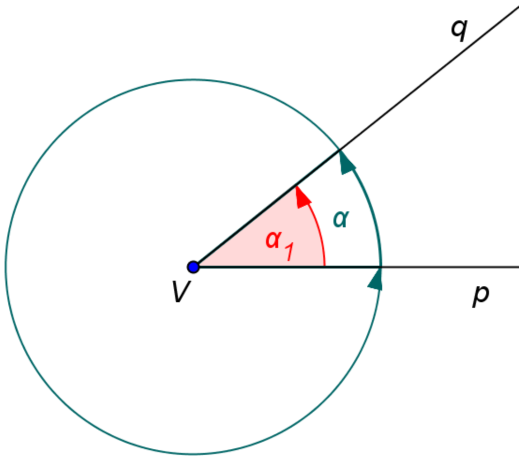
Primjer 2. Mjeru kuta u radijanima izrazimo u stupnjevima:

a) $3 \text{ rad } = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 3 \approx 181.8873358^\circ \approx 181^\circ 53' 14'',$

b) $\frac{5\pi}{9} \text{ rad } = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{9} = 100^\circ.$

1.2. PROŠIRENJE POJMA KUTA

Ako sada pretpostavimo da je prvi krak, nakon što je opisao puni kut, nastavio vrtnju oko vrha, onda dobivamo kut kojemu je mjera $\alpha > 360°$, odnosno $\alpha > 2\pi$ rad. Vrtnja se može nastaviti, odnosno zraka p može i po više puta „prebrisati“ cijelu ravninu dok ne dođe u položaj q. Zato isti kut može imati više različiti mjera. Dva kraka ne određuju jedan kut već njih beskonačno mnogo pozitivnih ili negativnih, koji se međusobno razlikuju za cjelobrojni višekratnik punog kuta.



Neka je α_1 mjera kuta $\angle pVq$. Tada istom kutu pripada i mjera $\alpha_1 + 360°$, $\alpha_1 + 720°$, ali i $\alpha_1 - 360°$, $\alpha_1 - 720°$ i općenito $\alpha_1 + k \cdot 360°$ za neki cijeli broj k.

Mjeru α_1 kuta određenog kracima p i q za koju vrijedi $0 \le \alpha_1 < 360°$ nazivamo **glavna mjera kuta** $\angle pVq$. Mjere α svih ostalih kutova određenih kracima p i q mogu se izraziti formulom:

glavna mjera kuta

$$\alpha = \alpha_1 + k \cdot 360° \text{ ili } \alpha = \alpha_1 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Iz toga slijedi:

$$\alpha_1 = \alpha - k \cdot 360° \text{ ili } \alpha_1 = \alpha - k \cdot 2\pi,$$

pri čemu je $0 \le \alpha_1 < 360°$ i k najveći cijeli broj manji od kvocijenta $\alpha : 360°$, odnosno $\alpha : 2\pi$.

Primjer 1. Odredimo glavnu mjeru kuta:

a) $\alpha = 1273°$

Imamo $1273 : 360 = 3.536\dot{1}$ pa je $k = 3$. Sada je:
$\alpha_1 = \alpha - k \cdot 360° = 1273° - 3 \cdot 360° = 193°$.

b) $\alpha = -3555°$

Imamo $-3555 : 360 = -9.875$ pa je $k = -10$. Sada je:
$\alpha_1 = \alpha - k \cdot 360° = -3555° - (-10) \cdot 360° = 45°$.

c) $\alpha = \frac{271\pi}{6}$

Imamo $\frac{271\pi}{6} : 2\pi = \frac{271\pi}{6} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{271}{12} = 22.58\dot{3}$ pa je $k = 22$. Sada je:

$\alpha_1 = \alpha - k \cdot 2\pi = \frac{271\pi}{6} - 22 \cdot 2\pi = \frac{271\pi - 264\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.

d) $\alpha = -\frac{113\pi}{3}$

Imamo $-\frac{113\pi}{3} : 2\pi = -\frac{113\pi}{3} \cdot \frac{1}{2\pi} = -\frac{113}{6} = -18.8\dot{3}$ pa je $k = -19$. Sada je:

$\alpha_1 = \alpha - k \cdot 2\pi = -\frac{113\pi}{3} - (-19) \cdot 2\pi = \frac{-113\pi + 114\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

e) $\alpha = -10$

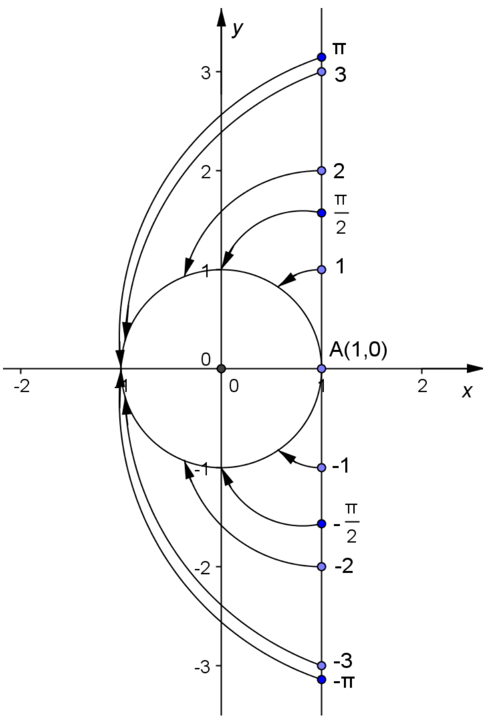
Imamo $-10 : 2\pi = -1.59154$ pa je $k = -2$. Sada je:

$\alpha_1 = \alpha - k \cdot 2\pi = -10 - (-2) \cdot 2\pi = -10 + 4\pi \approx 2.56637$.

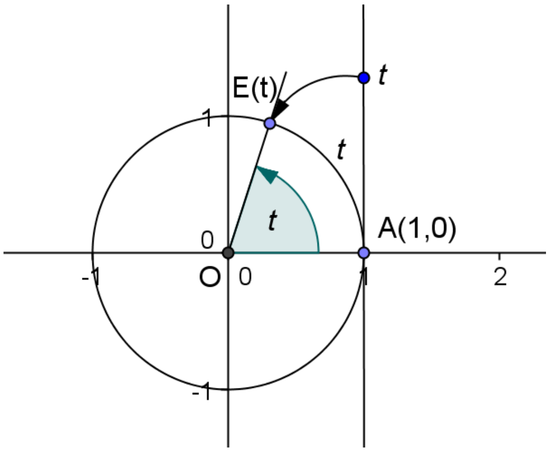
1.3. BROJEVNA KRUŽNICA

U pravokutnom koordinatnom sustavu nacrtajmo kružnicu čije je središte u ishodištu sustava , a polumjer joj je 1. Neka je $A(1,0)$ točka na presjeku kružnice i osi apscisa.

Prislonimo brojevni pravac na kružnicu tako da svojim ishodištem dira kružnicu u točki A. Zamislimo da se taj pravac, bez rastezanja, namata na kružnicu. Tada će se njegov interval $[0,2\pi)$ preslikati na čitavu kružnicu jer je opseg kružnice 2π. Isto će se dogoditi i s intervalom $[2\pi,4\pi)$, kao i s intervalom $[-2\pi,0)$ i svakim drugim duljine 2π.



Tako se svaki realni broj t brojevnog pravca preslika u jednu točku $E(t)$ na kružnici. Broj t je mjerni broj duljine orijentiranog luka $AE(t)$ i radijanski mjerni broj orijentiranog središnjeg kuta $\angle AOE(t)$.



Namatanjem brojevnog pravca na kružnicu definirano je pridruživanje: $t \mapsto E(t)$ između realnih brojeva i skupa točaka kružnice koje nazivamo **eksponencijalno preslikavanje**. Kružnicu nazivamo **brojevna kružnica**, **jedinična kružnica** ili **trigonometrijska kružnica**.

brojevna kružnica

Kad preslikamo sve realne brojeve t intervala $[0,2\pi)$ na točke kružnice, „prekrili“ smo cijelu kružnicu. Nastavimo li namatanje pravca nakon što smo preslikali interval $[0,2\pi)$, onda ćemo točku $E(t_1)$ pridružiti broju $t_1 \in [0,2\pi)$ uvećanom za duljinu kružnice 2π, tj. broju $t_1 + 2\pi$. Daljnjim namatanjem istu točku pridružujemo brojevima $t_1 + 2\cdot 2\pi$, $t_1 + 3\cdot 2\pi$, … Namatanjem onog dijela brojevnog pravca na kojemu su smješteni negativni brojevi, točku $E(t_1)$ pridružit ćemo brojevima $t_1 - 2\pi$, $t_1 - 2\cdot 2\pi$, $t_1 - 3\cdot 2\pi$, …
Općenito možemo pisati:

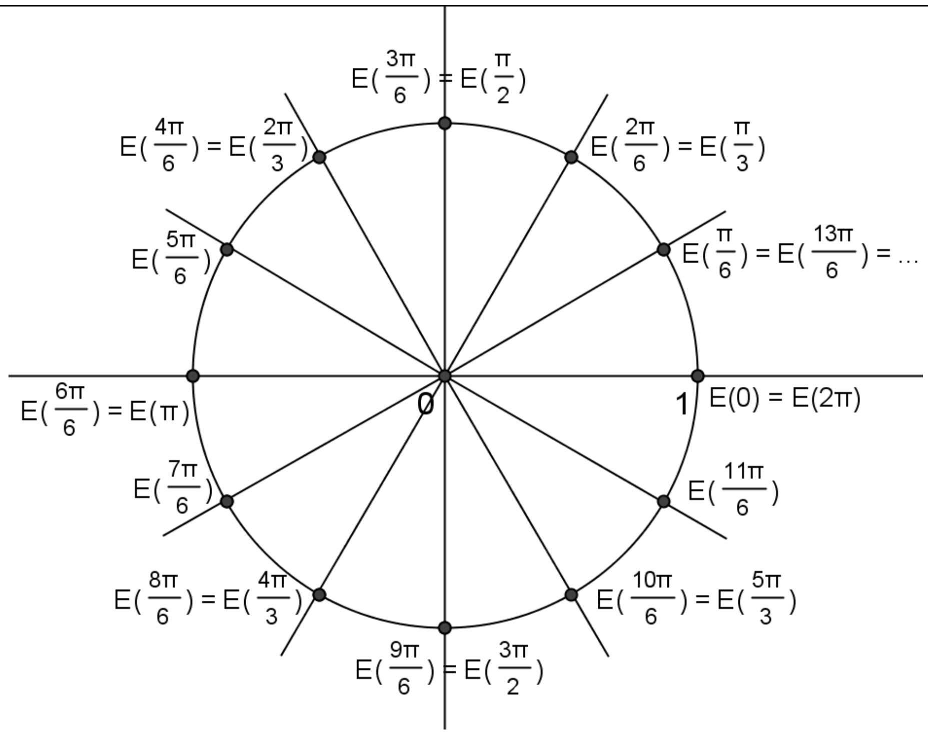
$$E(t_1) = E(t_1 + k\cdot 2\pi),\ k \in \mathbf{Z}.$$

$t_1 \in [0,2\pi)$ je glavna mjera svih kutova kojima je pridružena točka $E(t_1)$.

Brojevnom kružnicom svakom realnom broju t pridružujemo jednu jedinu točku $E(t)$, a jednoj točki brojevne kružnice pridružujemo beskonačno mnogo realnih brojeva koji se razlikuju za cjelobrojni višekratnik broja 2π.

Točkama u kojima kružnica siječe koordinatne osi pridruženi su brojevi $0 + k\cdot 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$, $\pi + k\cdot 2\pi$, $\frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi$.

Primjer 1. Nacrtajmo na brojevnoj kružnici točke pridružene brojevima $k\cdot\frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbf{N}$.



Primjer 2. Odredimo glavnu mjeru t_1 broja t i kvadrant u kojemu se ti brojevi nalaze prikazani na brojevnoj kružnici.

a) $t = \dfrac{783\pi}{4}$

Postupimo kao u *Primjeru 1.* prethodnog odjeljka.

Imamo $\dfrac{783\pi}{4} : 2\pi = \dfrac{783\pi}{4} \cdot \dfrac{1}{2\pi} = \dfrac{783}{8} = 97.875$ pa je $k = 97$. Sada je:

$t_1 = t - k \cdot 2\pi = \dfrac{783\pi}{4} - 97 \cdot 2\pi = \dfrac{7\pi}{4}$.

Dobivamo da je $E\left(\dfrac{783\pi}{4}\right) = E\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$, a budući da je $\dfrac{7\pi}{4} \in \left\langle \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi \right\rangle$

brojevi t_1 i t nalaze se u četvrtom kvadrantu.

b) $t = -400$

Imamo $-400 : 2\pi = -63.66198$ pa je $k = -64$. Sada je:

$t_1 = t - k \cdot 2\pi = -400 - (-64) \cdot 2\pi = -400 + 128\pi = 2.12387$.

Dobivamo da je $E(-400) = E(2.12387)$, a budući da je $2.12387 \in \left\langle \dfrac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$

brojevi t_1 i t nalaze se u drugom kvadrantu.

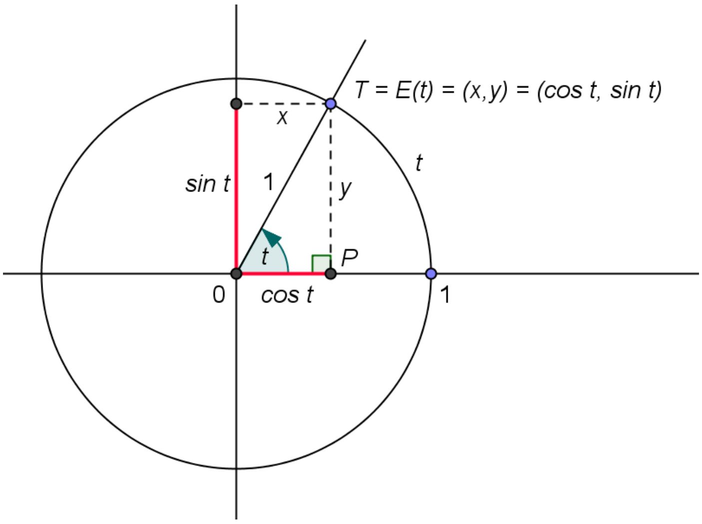
1.4. DEFINICIJE TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Do sada smo definirali trigonometrijske funkcije šiljastog kuta pravokutnog trokuta kao omjere duljina stranica trokuta. Ovdje ćemo proširiti te definicije i definirati trigonometrijske funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens kao realne funkcije. Koristit ćemo brojevnu kružnicu na koju smo smjestili sve realne brojeve.

Sinus i kosinus

Neka je t po volji odabran realni broj i $T = E(t) = (x, y)$ njemu pridružena točka brojevne kružnice. Na slici je odabrana točka u prvom kvadrantu. Primjenom definicija trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta u pravokutnom trokutu OPT dobivamo:

$$\cos t = \frac{x}{1} = x \text{ i } \sin t = \frac{y}{1} = y .$$



Prema tome, točka T ima koordinate $T(\cos t, \sin t)$.

Vrijednost funkcije **kosinus** po volji odabranog realnog broja t, oznaka $\cos t$, je **apscisa**, a vrijednost funkcije **sinus**, oznaka $\sin t$, **ordinata** tom broju pridružene točke $T = E(t)$ brojevne kružnice.

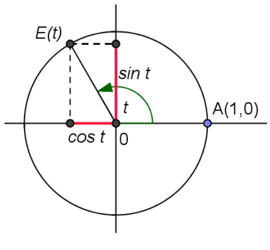
definicija funkcija sinus i kosinus

Uočavamo sa slike da je najveća vrijednost koju poprimaju funkcije sinus i kosinus 1, a najmanja vrijednost koju poprimaju -1.
Dakle, funkcija sinus realnom broju t pridružuje vrijednost $\sin t \in [-1,1]$, a funkcija kosinus realnom broju t pridružuje vrijednost $\cos t \in [-1,1]$, tj:

$$\sin : \mathbf{R} \to [-1,1] \text{ i}$$
$$\cos : \mathbf{R} \to [-1,1].$$

Primjer 1. Pomoću brojevne kružnice nacrtajmo: $\sin\frac{2\pi}{3}$, $\cos\frac{2\pi}{3}$.

$t = \frac{2\pi}{3} = 120°$ nalazi se u drugom kvadrantu.

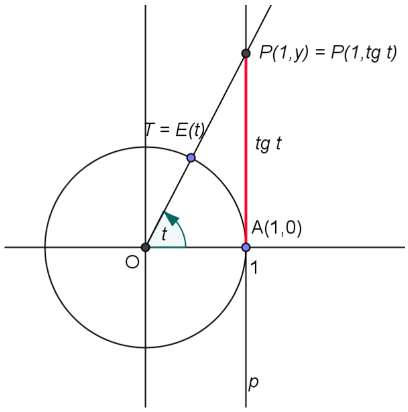


Tangens

Povucimo tangentu p na brojevnu kružnicu u točki $A(1,0)$.

Neka je $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, po volji odabran realni broj i $T = E(t)$ njemu pridružena točka brojevne kružnice. Na slici je odabrana točka u prvom kvadrantu. Pravac OT siječe tangentu p u točki $P(1, y)$. Primjenom definicija trigonometrijskih funkcija šiljatog kuta u pravokutnom trokutu OAP dobivamo:

$$\operatorname{tg} t = \frac{y}{1} = y .$$



Prema tome, točka P ima koordinate $P(1, tgt)$.

Vrijednost funkcije **tangens** po volji odabranog realnog broja $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, oznaka $\operatorname{tg} t$, je **ordinata** točke u kojoj pravac OT siječe tangentu p.

definicija funkcije tangens

Funkcija tangens po volji odabranom realnom broju $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ pridružuje vrijednost $\operatorname{tg} t \in \mathbf{R}$, tj:

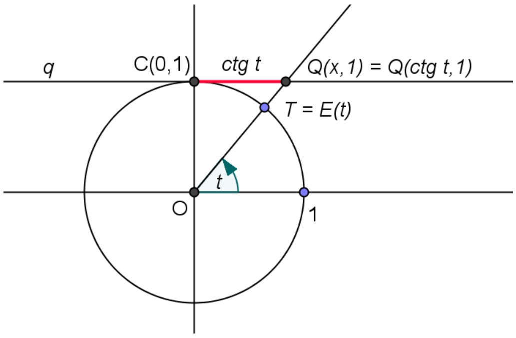
$$\operatorname{tg} t : \mathbf{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\} \to \mathbf{R}.$$

Funkcija tangens nije definirana za bojeve $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ jer za njih pripadni pravac OT ne siječe tangentu p nego je s njome paralelan.

Kotangens

Povucimo tangentu q na brojevnu kružnicu u točki $C(0,1)$.
Neka je $t \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, po volji odabran realni broj i $T = E(t)$ njemu pridružena točka brojevne kružnice. Na slici je odabrana točka u prvom kvadrantu. Pravac OT siječe tangentu q u točki $Q(x,1)$. Primjenom definicija trigonometrijskih funkcija šiljatog kuta u pravokutnom trokutu OCQ dobivamo:

$$\operatorname{ctg} t = \frac{x}{1} = x .$$



Prema tome, točka Q ima koordinate $Q(ctgt,1)$.

Vrijednost funkcije **kotangens** po volji odabranog realnog broja $t \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, oznaka $\operatorname{ctg} t$, je **apscisa** točke u kojoj pravac OT siječe tangentu q.

definicija funkcije kotangens

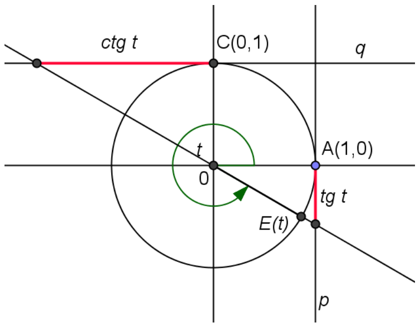
Funkcija kotangens po volji odabranom realnom broju $t \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ pridružuje vrijednost $\operatorname{ctg} t \in \mathbf{R}$, tj:

$$\operatorname{ctg} t : \mathbf{R} \backslash \{k\pi, k \in Z\} \to \mathbf{R}.$$

Funkcija kotangens nije definirana za bojeve $t = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ jer za njih pripadni pravac OT ne siječe tangentu q nego je s njome paralelan.

Primjer 2. Pomoću brojevne kružnice nacrtajmo: $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6}$, $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}$.

$t = \frac{11\pi}{6} = 330°$ nalazi se u četvrtom kvadrantu.



1.5. PREDZNACI VRIJEDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Po definiciji vrijednosti trigonometrijskih funkcija su koordinate točaka. Kako predznak koordinata točke ovisi u kojem je ona kvadrantu tako i predznak vrijednosti $\sin t$ i $\cos t$ ovisi o tome u kojem je kvadrantu točka $E(t)$, a predznak vrijednosti $\operatorname{tg} t$ i $\operatorname{ctg} t$ o položaju točaka P i Q. Korisno je zapamtiti kakvi su predznaci tih funkcija u pojedinom kvadrantu.

		KVADRANT			
		I.	II.	III.	IV.
PREDZNAK VRIJEDNOSTI FUNKCIJE	sin	+	+	-	-
	cos	+	-	-	+
	tg	+	-	+	-
	ctg	+	-	+	-

tablica predznaka vrijednosti trigonometrijskih funkcija

Provjerite podatke iz tablice redom za kut prvog, drugog, trećeg i četvrtog kvadranta.

Primjer 1. Odredimo da li je vrijednost zadanog izraza pozitivna ili negativna:

$$\frac{ctg187° \cdot \cos^4(-103°) \cdot \sin 166°}{tg^3 353° \cdot tg^2(-253°)}.$$

Budući da se traži samo predznak izraza, a ne njegova vrijednost, dovoljno je smjestiti zadane kutove u odgovarajući kvadrant te pogledati vrijednost trigonometrijskih funkcija u pojedinim kvadrantima:

$$\frac{(-)\cdot(-)^4\cdot(+)}{(-)^3\cdot(-)^2}=\frac{(-)\cdot(+)\cdot(+)}{(-)\cdot(+)}=+.$$

1.6. IZRAČUNAVANJE VRIJEDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Ranije smo računali vrijednosti trigonometrijskih funkcija za kutove od $30°$, $45°$ i $60°$ promatraju ći jednakostraničan trokut i jednakokračan pravokutan trokut. Dobili smo podatke zapisane u tablici:

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

vrijednosti trigonometrijskih funkcija poznatih kutova prvog kvadranta

Naučili smo i računati vrijednosti trigonometrijskih funkcija za po volji odabrane kutove $t \in \langle 0°, 90° \rangle$ pomoću džepnog računala. Postupak računanja vrijednosti funkcija za kut $t > 90°$, kao i za negativne kutove, isti je kao za šiljaste kutove: upisujemo mjeru kuta s predznakom i pritisnemo tipku s nazivom funkcije čiju vrijednost želimo izračunati. Kod nekih računala najprije upišemo naziv funkcije pa onda mjeru kuta. Dobivenu približnu vrijednost zapisujemo na određeni broj decimala ovisno o tome koliku preciznost želimo.

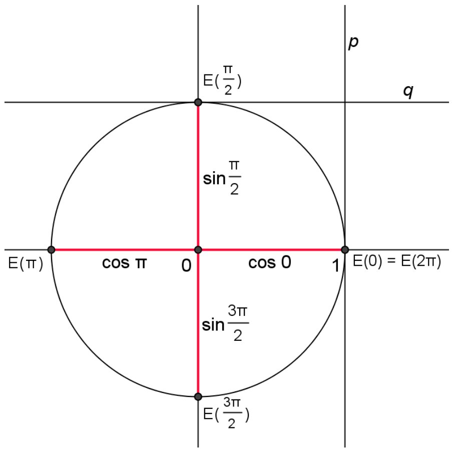
Dok nije bilo računala koristile su se tablice vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova $t \in [0°, 90°]$, tj. kutova iz prvog kvadranta. Vrijednosti funkcija ostalih kutova tada računamo postupkom svođenja na prvi kvadrant, odnosno postupkom kojim vrijednost funkcije kuta koji nije u prvom kvadrantu izražavamo pomoću funkcije odgovarajućeg kuta u prvom kvadrantu. Pri tome koristimo formule za svođenje na prvi kvadrant koje nazivamo formule redukcije:

$\sin(\pi - t) = \sin t$ $\cos(\pi - t) = -\cos t$ $tg(\pi - t) = -tgt$ $ctg(\pi - x) = -ctgt$	$\sin(\pi + t) = -\sin t$ $\cos(\pi + t) = -\cos t$ $tg(\pi + t) = tgt$ $ctg(\pi + x) = ctgt$	$\sin(2\pi - t) = -\sin t$ $\cos(2\pi - t) = \cos t$ $tg(2\pi - t) = -tgt$ $ctg(2\pi - x) = -ctgt$

formule redukcije

Mi ćemo u nastavku koristiti tablicu vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova $t \in [0°, 360°]$ koja se nalazi u **Dodatku**. Pokušajte sami dobiti rezultate iz tablice postupkom svođenja na prvi kvadrant.

Ovdje ćemo pogledati vrijednosti trigonometrijskih funkcija za kutove od $0°$, $90°$, $180°$, $270°$ i $360°$, tj. za kutove 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ i 2π. Smjestimo ih na brojevnu kružnicu te se sjetimo definicija funkcija i područja njihove definicije. Slijedi:



$\sin 0 = \sin 2\pi = 0$	$\sin\frac{\pi}{2} = 1$	$\sin\pi = 0$	$\sin\frac{3\pi}{2} = -1$
$\cos 0 = \cos 2\pi = 1$	$\cos\frac{\pi}{2} = 0$	$\cos\pi = -1$	$\cos\frac{3\pi}{2} = 0$
$\mathrm{tg}\, 0 = \mathrm{tg}\, 2\pi = 0$	$\mathrm{tg}\frac{\pi}{2} = \pm\infty$	$\mathrm{tg}\,\pi = 0$	$\mathrm{tg}\frac{3\pi}{2} = \pm\infty$
$\mathrm{ctg}\, 0 = \mathrm{ctg}\, 2\pi = \pm\infty$	$\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$	$\mathrm{ctg}\,\pi = \pm\infty$	$\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{2} = 0$

Do sada smo se prisjetili kako za zadani realni broj određujemo vrijednost trigonometrijske funkcije. Od ranije znamo da često moramo rješavati obrnuti zadatak: odrediti kut ako je poznata vrijednost trigonometrijske funkcije za taj kut, odnosno realni broj. Prisjetite se tog postupka koji smo naučili ranije, a o tome nastavljamo u idućem poglavlju.

Pogledajmo u primjeru kako računamo vrijednosti trigonometrijskih funkcija za „poznate“ kutove, tj. kutove koje možemo svesti na kutove prvog kvadranta. Napomenimo da ćemo korak određivanja kuta t_0, tj. određivanje odgovarajućeg kuta u prvom kvadrantu, uglavnom izostavljati, posebno zapamtimo li vrijednosti iz tablice u Dodatku.

Primjer 1. Izračunajmo:

a) $\sin\frac{415\pi}{4}$

Odredimo najprije glavnu mjeru kuta $\frac{415\pi}{4}$:

$\frac{415\pi}{4} : 2\pi = \frac{415\pi}{4} : \frac{1}{2\pi} = 415 : 8 = 51.875$ pa je $k = 51$. Sada je

$t_1 = \frac{415\pi}{4} - 51 \cdot 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

Kut $\frac{7\pi}{4}$ nalazi se u četvrtom kvadrantu. Simetrijom pridruženi broj u prvom kvadrantu je $t_0 = 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Sinus je u četvrtom kvadrantu negativan, pa je:

$\sin\frac{415\pi}{4} = \sin\frac{7\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\operatorname{tg}(-12120°)$

Odredimo najprije glavnu mjeru kuta $-12120°$:

$-12120 : 360 = -33.\dot{6}$ pa je $k = -34$. Sada je

$t_1 = -12120° - (-34) \cdot 360° = 120°$.

Kut $120°$ nalazi se u drugom kvadrantu. Simetrijom pridruženi broj u prvom kvadrantu je $t_0 = 180° - 120° = 60°$. Tangens je u drugom kvadrantu negativan, pa je:

$\operatorname{tg}(-12120°) = \operatorname{tg}120° = -\operatorname{tg}60° = -\sqrt{3}$

1.7. SVOJSTVA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Područje definicije i područje vrijednosti funkcija

U odjeljku 1.4. već je bilo govora o području definicije (domeni) i području vrijednosti (kodomeni) trigonometrijskih funkcija.

Funkcije sinus i kosinus su definirane za svaki realni broj t, tj. njihova je domena čitavi skup $\mathbf{R}$. Maksimalna vrijednost funkcija je 1, a minimalna -1 pa je područje vrijednosti sinusa i kosinusa interval $[-1,1]$.

domena i kodomena trigonometrijskih funkcija

Funkcije tangens definirana je za svaki realni broj $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, tj. domena funkcije tangens je skup $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$.

Funkcije kotangens definirana je za svaki realni broj $t \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, tj. domena funkcije kotangens je skup $\mathbf{R} \setminus \{ k\pi, k \in Z \}$.
Područje vrijednosti funkcija tangens i kotangens je čitavi skup $\mathbf{R}$.

Parnost i neparnost

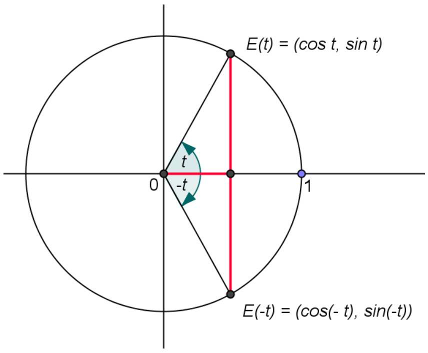
Kažemo da je funkcija $f: D \to \mathbf{R}$ **parna** ako i samo ako vrijedi $f(-x) = f(x)$ za sve vrijednosti $x \in D$.
Kažemo da je funkcija $f: D \to \mathbf{R}$ **neparna** ako i samo ako vrijedi $f(-x) = -f(x)$ za sve vrijednosti $x \in D$.

parna funkcija

neparna funkcija

Primijetimo da funkcija ne mora biti niti parna niti neparna.

Pogledajmo sliku:



Uočavamo da je:

$$\sin(-t) = -\sin t \text{ i}$$
$$\cos(-t) = \cos t .$$

Da bi provjerili parnost ili neparnost funkcije tangens možemo postupiti na sličan način, promatrajući sliku, ali se možemo sjetiti i veze između trigonometrijskih funkcija koja nam je poznata od ranije:

$$\operatorname{tg}(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} - \operatorname{tg} t .$$

Kako je $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{tgt}$, funkcije tangens i kotangens iste su parnosti. A kako je tangens neparan, tako je i kotangens neparan, tj.

$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t \text{ i}$$
$$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t.$$

Periodičnost

periodična funkcija

period

temeljni period

Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbf{R}$ **periodična** ako postoji broj $P > 0$ takav da za sve $x \in D$ vrijedi $f(x+P) = f(x)$. Broj P naziva se **period** funkcije f. Najmanji pozitivan broj za koji to vrijedi naziva se **temeljni period**.

Pri smještanju realnih brojeva na brojevnu kružnicu jednoj točki kružnice pridružujemo beskonačno mnogo realnih brojeva, tj. zaključili smo da za realni broj t vrijedi:

$$E(t) = E(t + k \cdot 2\pi),\ k \in \mathbf{Z}.$$

periodičnost funkcija sinus i kosinus

Navedeno izravno povlači da je:

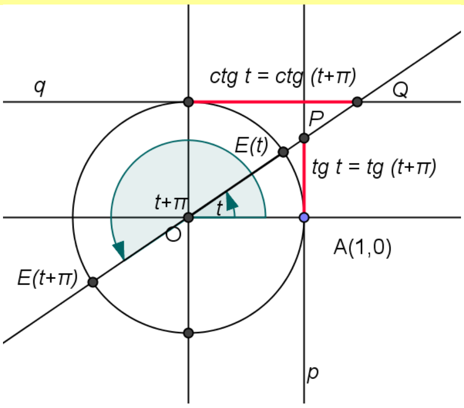
$$\sin(t + k \cdot 2\pi) = \sin(t) \text{ i}$$
$$\cos(t + k \cdot 2\pi) = \cos(t),\ k \in \mathbf{Z}.$$

Zaključujemo da su funkcije sinus i kosinus periodične s periodom $k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Najmanji pozitivan od tih perioda je 2π pa je temeljni period funkcija sinus i kosinus $P = 2\pi$ $(P = 360°)$.

periodičnost funkcija tangens i kotangens

Na slici vidimo da su točke $E(t)$ i $E(t+\pi)$ simetrične s obzirom na ishodište koordinatnog sustava. Drugim riječima, pravci $OE(t)$ i $OE(t+\pi)$ podudaraju pa se podudaraju i vrijednosti trigonometrijskih funkcija tangens i kotangens brojeva π i $t+\pi$, tj:

$$\operatorname{tg}(t + k \cdot \pi) = \operatorname{tg}(t) \text{ i}$$
$$\operatorname{ctg}(t + k \cdot \pi) = \operatorname{ctg}(t),\ k \in \mathbf{Z}.$$



Dakle, funkcije tangens i kotangens su periodične s periodom $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ i temeljnim periodom $P = \pi$ $(P = 180°)$.

Primjer 1. Pojednostavimo primjenom periodičnosti te parnosti ili neparnosti:

$$\frac{[\sin(68\pi - x) - 2\sin(x - 9720°)] \cdot ctg(2340° - x)}{tg(x - 17\pi) \cdot [2\cos(5400° - x) + 4\cos(x - 72\pi)]}.$$

Budući da imamo:

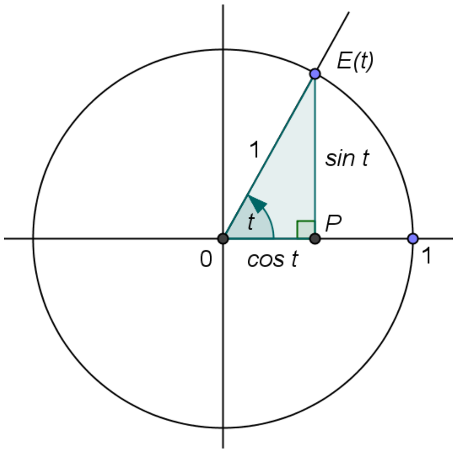
$$\frac{\left[\sin(34\cdot 2\pi - x) - 2\sin(x - 27\cdot 360°)\right]\cdot ctg(13\cdot 180° - x)}{tg(x - 17\cdot \pi)\cdot\left[2\cos(15\cdot 360° - x) + 4\cos(x - 36\cdot 2\pi)\right]}$$

primjenom svojstva periodičnosti najprije dobivamo: $\dfrac{\left[\sin(-x) - 2\sin x\right]\cdot ctg(-x)}{tgx\cdot\left[2\cos(-x) + 4\cos x\right]}$, a onda primjenom svojstva parnosti i neparnosti te poznatih veza između trigonometrijskih funkcija:

$$\frac{\left[-\sin x - 2\sin x\right]\cdot(-ctgx)}{tgx\cdot\left[2\cos x + 4\cos x\right]} = \frac{-3\sin x\cdot\left(-\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)}{\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot 6\cos x} = \frac{3\cos x}{6\sin x} = \frac{1}{2}ctgx\,.$$

1.8. TRIGONOMETRIJSKI IDENTITETI

1.8.1. OSNOVNI TRIGONOMETRIJSKI IDENTITETI



Promotrimo sliku. Iz pravokutnog trokuta $OPE(t)$ primjenom Pitagorina poučka dobivamo da za svaki realni broj t vrijedi:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

temeljni trigonometrijski identitet

Dobivenu jednakost nazivamo **temeljni trigonometrijski identitet**.

Ranije smo dokazali i ostale osnovne veze između trigonometrijskih funkcija:

$$\mathrm{tg}\,t = \frac{\sin t}{\cos t},$$

a budući znamo da je $\mathrm{ctg}\,t = \dfrac{1}{tgt}$ dalje vrijedi:

$$\mathrm{ctg}\,t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

osnovne veze trigonometrijskih funkcija

Slijede identiteti:

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ i } 1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Primjer 1. Izračunajmo vrijednosti preostalih trigonometrijske funkcija ako je $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{40}{9}$, $\alpha \in \left\langle 15\pi, \dfrac{31\pi}{2}\right\rangle$.

Odredimo najprije kvadrant u kojemu se nalazi kut α. Budući da je $E(15\pi) = E(\pi)$ i $E\left(\frac{31\pi}{2}\right) = E\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, vrijedi $\left\langle 15\pi, \frac{31\pi}{2} \right\rangle = \left\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$, odnosno α je kut u trećem kvadrantu. To znači da vrijednost sinusa i kosinusa kuta α negativna.

Sada iz identiteta $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ dobivamo:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \frac{1600}{81} = \frac{1681}{81},$$

odnosno

$$\cos^2\alpha = \frac{81}{1681}$$

pa je

$$\cos\alpha = -\frac{9}{41}.$$

$\sin\alpha$ možemo izračunati primjenom temeljnog trigonometrijskog identiteta ili formulom $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ iz koje je:

$$\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{9}{41} \cdot \frac{40}{9} = -\frac{40}{41}.$$

Na kraju je: $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{9}{40}$.

1.8.2. ADICIJSKI TEOREMI

Iskažimo (bez dokaza) adicijske teoreme, tj. funkcije zbroja i razlike:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$	**sinus zbroja (razlike)**
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$	**kosinus zbroja (razlike)**
$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$	**tangens zbroja (razlike)**
$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$	**kotangens zbroja (razlike)**

adicijski teoremi

U navedenim formulama treba uzeti ili samo gornji ili samo donji predznak.
U formulama u kojima dolazi tg i ctg pretpostavljaju se argumenti za koje su te dvije funkcije definirane.

Primjer 1. Bez upotrebe džepnog računala izračunajmo:

a) $\cos 105° = \cos(45° + 60°) = \cos 45° \cos 60° - \sin 45° \sin 60° =$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{4},$$

b) $$tg\frac{\pi}{12}=tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tg\frac{\pi}{3}-tg\frac{\pi}{4}}{1+tg\frac{\pi}{3}\cdot tg\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-3-1+\sqrt{3}}{1-3}=\frac{2\sqrt{3}-4}{-2}=\frac{-2\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}{-2}=2-\sqrt{3}.$$

Primjer 2. Bez upotrebe džepnog računala izračunajmo:

a) $\sin 10^\circ\cos 50^\circ+\cos 10^\circ\sin 50^\circ=\sin\left(10^\circ+50^\circ\right)=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

b) $\dfrac{tg 50^\circ-tg 20^\circ}{1+tg 50^\circ\cdot tg 20^\circ}=tg\left(50^\circ-20^\circ\right)=tg 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Primjer 3. Bez upotrebe džepnog računala izračunajmo $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$ ako je $\cos x=-\dfrac{12}{13}$, $x\in\left\langle-\dfrac{19\pi}{2},-9\pi\right\rangle$.

Budući da je $E\left(-\dfrac{19\pi}{2}\right)=E\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ i $E(-9\pi)=E(\pi)$, vrijedi $\left\langle-\dfrac{19\pi}{2},-9\pi\right\rangle=\left\langle\dfrac{\pi}{2},\pi\right\rangle$ pa je x u drugom kvadrantu. To znači da vrijednost sinusa pozitivna. Sada iz temeljnog identiteta $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ dobivamo:

$$\sin^2 x=1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2,$$

odnosno

$$\sin^2 x=\frac{25}{169}$$

pa je

$$\sin x=\frac{5}{13}.$$

Sada je

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{13}=\frac{5-12\sqrt{3}}{26}.$$

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Odredite glavnu mjeru i prikaži na brojevnoj kružnici točku $E(t)$ ako je:

   a) $t=-\dfrac{83\pi}{3}$, b) $t=\dfrac{269\pi}{6}$, c) $t=-\dfrac{395\pi}{4}$, d) $t=3930^\circ$.

   Označite vrijednosti svih trigonometrijskih funkcija za zadani broj *t*.

2. Odredite na brojevnoj kružnicu točku $E(t)$ ako je:

a) $\sin t = \frac{3}{4}$ i $\cos t > 0$, b) $\cos t = -\frac{1}{2}$ i $\sin t < 0$,

c) $tgt = -\frac{3}{2}$ i $\sin t > 0$, d) $ctgt = 3$ i $\cos t < 0$.

3. Odredite da li je vrijednost izraza pozitivna ili negativna:

a) $\frac{ctg 333° \cdot \cos(-111°) \cdot \sin 55°}{tg^2 300° \cdot tg(-222°)}$,

b) $\frac{\cos^2(-1180°) \cdot \sin \frac{599\pi}{6}}{ctg\left(-\frac{77\pi}{4}\right)° \cdot tg(1630°)}$.

4. Pojednostavite primjenom periodičnosti te parnosti ili neparnosti:

a) $\frac{\cos(88\pi - x) \cdot tg(1080° - x)}{\sin(7200° - x) \cdot ctg(x - 55\pi)}$,

b) $\frac{5\sin(44\pi - x) - 3\sin(x - 720°)}{3\cos(1800° - x) + \cos(64\pi + x)}$,

c) $\frac{ctg(6\pi - x) + tg(x - 13\pi)}{tg(20\pi - x) - ctg(11\pi - x)}$,

d) $\frac{3\cos(34\pi - x)\sin(8\pi - x) - \cos(24\pi + x)\sin(x - 18\pi)}{2\sin(14\pi - x) + \sin(x - 36\pi)}$.

5. Ne koristeći džepno računalo, primjenom parnosti i neparnosti te periodičnosti izračunajte:

a) $\frac{\sin^2 \frac{4\pi}{3} - 3\sin 3390° \cdot \cos(-5580°)}{tg \frac{101\pi}{3} - 3\sin\left(-\frac{53\pi}{2}\right) - 9ctg^2(-5160°)}$,

b) $\sin 1920° \cdot tg \frac{55\pi}{6} - \frac{\cos^2 \frac{69\pi}{4}}{ctg^2(-3270°)}$.

6. Izračunajte preostale trigonometrijske funkcije ako je:

a) $\sin t = -\frac{60}{61}$, $t \in \left\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$,

b) $\cos x = -\frac{24}{25}$, $x \in \left\langle \frac{9\pi}{2}, 5\pi \right\rangle$,

c) $tg\alpha = -\frac{35}{12}$, $\alpha \in \langle 3150°, 3240° \rangle$,

d) $ctg\beta = -\frac{63}{16}$, $\beta \in \left\langle -\frac{15\pi}{2}, -7\pi \right\rangle$.

7. Bez upotrebe džepnog računala izračunajte:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ ako je $\sin x=\frac{3}{5}$, $x\in\left\langle\frac{\pi}{2},\pi\right\rangle$,

b) $\cos\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)$ ako je $tgx=\frac{24}{7}$, $x\in\left\langle\pi,\frac{3\pi}{2}\right\rangle$,

c) $tg\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$ ako je $\cos x=-\frac{3\sqrt{3}}{14}$, $x\in\left\langle\frac{\pi}{2},\pi\right\rangle$,

d) $ctg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ ako je $tgx=\frac{1}{3}$.

8. Bez upotrebe džepnog računala izračunajte:
   a) $\sin 75°$,
   b) $\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$,
   c) $\sin(x+20°)\cos(40°-x)+\cos(x+20°)\sin(40°-x)$,
   d) $ctg\frac{\pi}{12}$,
   e) $\dfrac{tg\frac{29\pi}{28}-tg\frac{7\pi}{28}}{1+tg\frac{29\pi}{28}\cdot tg\frac{7\pi}{28}}$,
   f) $\dfrac{ctg70°\cdot ctg10°+1}{ctg10°-ctg70°}$.

2. TRIGONOMETRIJSKE JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE. GRAFIČKI PRIKAZ TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Kako rješavamo osnove trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe?*
2. *Kako rješavamo različite tipove trigonometrijskih jednadžbi?*
3. *Kako grafički prikazati trigonometrijske funkcije?*

2.1. OSNOVNE TRIGONOMETRIJSKE JEDNADŽBE

Pogledajmo kako rješavamo osnovne trigonometrijske jednadžbe:

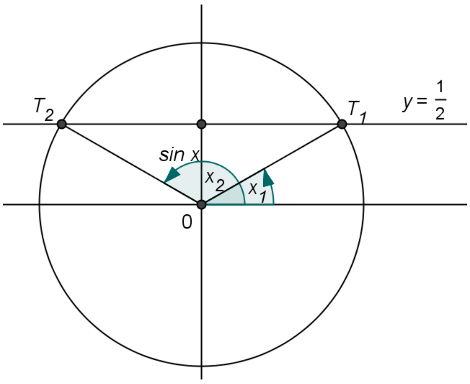
osnovne trigonome-trijske jednadžbe

a) $\sin x=c$, $-1\le c\le 1$

Primjer 1. Riješimo jednadžbu: $\sin x=\frac{1}{2}$.

Jednadžbu $\sin x=\frac{1}{2}$ ispunjavat će sve točke brojevne kružnice čija je ordinata

$\frac{1}{2}$. Povucimo pravac $y=\frac{1}{2}$. On siječe brojevnu kružnicu u dvije točke T_1 i T_2.



Odgovarajući kutovi su $\frac{\pi}{6}$ i $\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

No, ordinatu $\frac{1}{2}$ imaju i svi oni kutovi koji se od navedena dva razlikuju za višekratnik broja 2π, tj. rješenja jednadžbe su:

$$x_1=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \text{ i}$$

$$x_2=\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Općenito, jednadžba $\sin x=c$, $-1\le c\le 1$ ima rješenja:

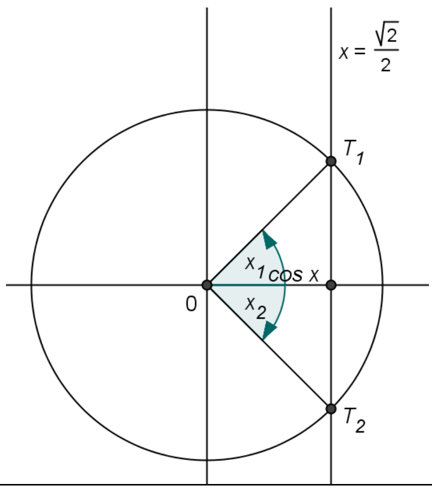
$$x_1=x_0+k\cdot 2\pi \text{ i } x_2=\pi-x_0+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

gdje je x_0 kut za koji vrijedi $\sin x_0=c$ i $-\frac{\pi}{2}\le x_0\le\frac{\pi}{2}$. Taj kut označavamo $x_0=\arcsin c$ (čitamo: „arkus sinus ce“). Vrijednost arkus sinusa dobivamo pomoću tablica ili pomoću džepnog računala pritiskom na tipku SIN^{-1}.

b) $\cos x=c$, $-1\le c\le 1$

Primjer 2. Riješimo jednadžbu: $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Jednadžbu $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ispunjavat će sve točke brojevne kružnice čija je apscisa $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Povucimo pravac $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. On siječe brojevnu kružnicu u dvije točke T_1 i T_2. Odgovarajući kutovi su $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{7\pi}{4}$, odnosno $\frac{\pi}{4}$ i $-\frac{\pi}{4}$.



No, apscisu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ imaju i svi oni kutovi koji se od navedena dva razlikuju za višekratnik broja 2π, tj. rješenja jednadžbe su:

$$x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$

$$x_2=-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Općenito, jednadžba $\cos x = c$, $-1 \le c \le 1$ ima rješenja:

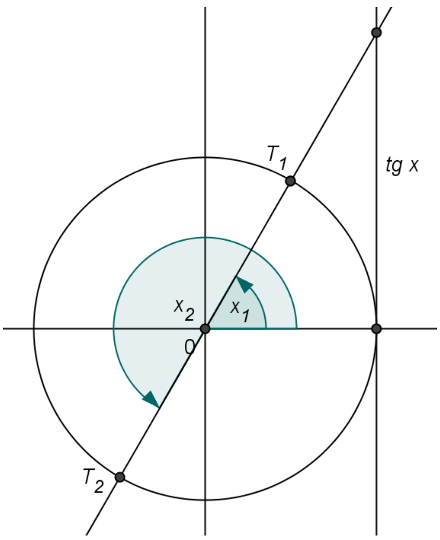
$$x_1 = x_0 + k \cdot 2\pi \text{ i } x_2 = -x_0 + k \cdot 2\pi \, , \; k \in \mathbf{Z},$$

gdje je x_0 kut za koji vrijedi $\cos x_0 = c$ i $0 \le x_0 \le \pi$. Taj kut označavamo $x_0 = \arccos c$ (čitamo: „arkus kosinus ce“). Vrijednost arkus kosinusa dobivamo pomoću tablica ili pomoću džepnog računala pritiskom na tipku COS^{-1}.

c) $\operatorname{tg} x = c$ i $\operatorname{ctg} x = c$, $c \in \mathbf{R}$

Primjer 3. Riješimo jednadžbu: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Odredimo točku $P(1, \sqrt{3})$ na pravcu $x = 1$. Pravac OP siječe brojevnu kružnicu u dvije točke T_1 i T_2.



Odgovarajući kutovi su $x_1 = \frac{\pi}{3}$ i $x_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. No, zadani uvjet ispunjavaju i svi oni kutovi koji se od navedena dva razlikuju za višekratnik broja 2π . Kako je funkcija tangens periodična s temeljnim periodom π , dovoljno je zapisati rješenja jednadžbe:

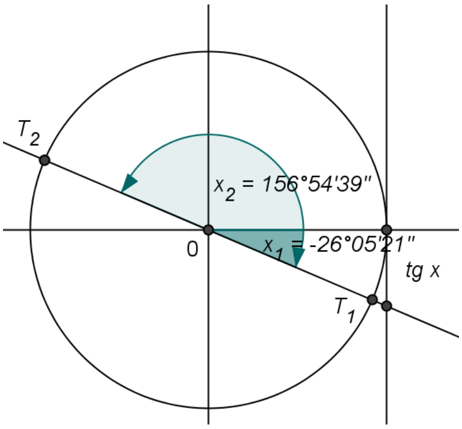
$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \, , \; k \in \mathbf{Z}.$$

Općenito, jednadžba $\operatorname{tg} x = c$, $c \in \mathbf{R}$ ima rješenja:

$$x = x_0 + k \cdot \pi \, , \; k \in \mathbf{Z},$$

gdje je x_0 kut za koji vrijedi $\operatorname{tg} x_0 = c$ i $-\frac{\pi}{2} < x_0 < \frac{\pi}{2}$. Taj kut označavamo $x_0 = \operatorname{arctg} c$ (čitamo: „arkus tangens ce“). Vrijednost arkus tangensa dobivamo pomoću tablica ili pomoću džepnog računala pritiskom na tipku TAN^{-1}.

Primjer 4. Riješimo jednadžbu: $\operatorname{ctg} x = -2.34567$.



Budući vrijedi $\operatorname{tg} t = \dfrac{1}{ctgt}$, imamo $\operatorname{tg} t = -0.426317$. Riješimo li jednadžbu kao u prethodnom primjeru, dobivamo da su rješenja jednadžbe:

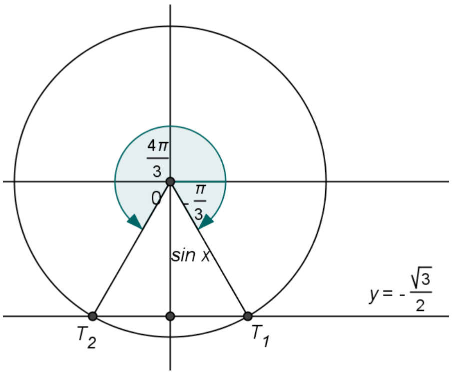
$$x = -23°05'21'' + k \cdot 180°, \; k \in \mathbf{Z}.$$

Kao osnovne trigonometrijske jednadžbe rješavamo i sljedeću i njoj slične jednadžbe:

Primjer 5. Riješimo jednadžbu: $\sin\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Povucimo pravac $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On siječe brojevnu kružnicu u dvije točke T_1 i T_2.

Njima odgovarajući kutovi su $-\dfrac{\pi}{3}$ i $\pi - \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{4\pi}{3}$.



No, ordinatu $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ imaju i svi oni kutovi koji se od navedena dva razlikuju za višekratnik broja 2π, tj:

$$\frac{x_1}{3} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

pa je

$$x_1 = \pi + k \cdot 6\pi, \; k \in \mathbf{Z}$$

i

$$\frac{x_2}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

iz čega slijedi

$$x_2 = 6\pi + k \cdot 6\pi, \; k \in \mathbf{Z}.$$

2.2. *TIPIČNE TRIGONOMETRIJSKE JEDNADŽBE*

Jednadžbe koje se svode na algebarske

Ove jednadžbe rješavamo tako da sve trigonometrijske funkcije izrazimo pomoću jedna funkcije istog argumenta. Dobivena ekvivalentna jednadžba se rješava uvođenjem nove nepoznanice umjesto te trigonometrijske funkcije. Kad riješimo tu jednadžbu dobijemo jednu ili više osnovnih trigonometrijskih jednadžbi.

jednadžbe koje se svode na algebarske

Primjer 1. Riješimo jednadžbu: $10\sin^2 x + 3\cos x - 9 = 0$.

Zapišimo najprije sve trigonometrijske funkcije u jednadžbi pomoću jedne trigonometrijske funkcije istog argumenta. Temeljni trigonometrijski identitete daje:

$$10\left(1-\cos^2 x\right) + 3\cos x - 9 = 0,$$

tj.

$$-10\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0.$$

Uvodimo novu nepoznanicu $t = \cos x$. Dobivamo jednadžbu:

$$-10t^2 + 3t + 1 = 0,$$

čija su rješenja: $t_1 = \frac{1}{2}$ i $t_2 = -\frac{1}{5}$. Vratimo se u supstituciju i riješimo jednadžbe: $\cos x = \frac{1}{2}$ i $\cos x = -\frac{1}{5}$. Rješenja ovih osnovnih trigonometrijskih jednadžbi su:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ i } x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

odnosno

$$x_3 = 1.77215 + 2k\pi \text{ i } x_4 = -1.77215 + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Homogene jednadžbe

Homogena trigonometrijska jednadžba je jednadžba oblika:

homogena trigonometrijska jednadžba

$$a_n \sin^n x + a_{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_1 \sin x \cos^{n-1} x + a_0 \cos^n x = 0,$$

pri čemu su a_0, a_1, …, a_n realni brojevi.

Linearna trigonometrijska jednadžba homogena s obzirom na $\sin x$ i $\cos x$ ima oblik:

$$a\sin x + b\cos x = 0,\ a \neq 0 \text{ i } b \neq 0.$$

Rješava se dijeljenjem s $\cos x \neq 0$. Tako dobijemo osnovnu trigonometrijsku jednadžbu:

$$atgx + b = 0.$$

Primjer 2. Riješimo jednadžbu: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$.

Dijeljenjem s $\cos x$ dobijemo:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\sqrt{3}\frac{\cos x}{\cos x}=0$$

iz čega je:

$$tgx+\sqrt{3}=0,$$

odnosno

$$tgx=-\sqrt{3}$$

čija su rješenja $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Kvadratna trigonometrijska jednadžba homogena s obzirom na $\sin x$ i $\cos x$ ima oblik:

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0,\ \ a\neq 0 \text{ i } c\neq 0.$$

Rješava se dijeljenjem s $\cos^2 x\neq 0$. Tako dobijemo jednadžbu:

$$atg^2 x+btgx+c=0,$$

koja se rješava uvođenjem nove nepoznanice.

Primjer 3. Riješimo jednadžbu: $\sin^2 x+3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$.

Jednadžbu smijemo podijeliti s $\cos^2 x$ jer brojevi x za koje je $\cos^2 x=0$ nisu rješenja jednadžbe. Dijeljenjem dobivamo:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+3\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}+2\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=0,$$

odnosno kvadratnu jednadžbu po tgx:

$$tg^2 x+3tgx+2=0,$$

koju rješavamo uvođenjem nove nepoznanice (kao *Primjer 1.*) $t=tgx$. Dobivamo:

$$t^2+3t+2=0,$$

čija su rješenja $t_1=-2$ i $t_2=-1$. Vratimo se u supstituciju i riješimo jednadžbe: $tgx=-2$ i $tgx=-1$. Rješenja prve jednadžbe su $x=-1.10714+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, a druge $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Trigonometrijska jednadžba oblika

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d,\ \ a\neq 0 \text{ ili } c\neq 0,\ d\neq 0$$

zamjenom $d=d\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$ nakon sređivanja prelazi u homogenu kvadratnu jednadžbu.

Primjer 4. Riješimo jednadžbu: $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2$.

Zamjenom $2=2\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$ na desnoj strani jednadžbe dobijemo:

$$6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right).$$

Sređivanjem dobijemo homogenu kvadratnu jednadžbu:

$$4\sin^2 x+\sin x\cos x-3\cos^2 x=0.$$

Jednadžbu smijemo podijeliti s $\cos^2 x$ jer brojevi x za koje je $\cos^2 x=0$ nisu rješenja jednadžbe. Dijeljenjem dobivamo kvadratnu jednadžbu po tgx:

$$4tg^2x + tgx - 3 = 0.$$

Uvođenjem nove nepoznanice $t = tgx$ imamo:

$$4t^2 + t - 3 = 0,$$

čija su rješenja $t_1 = -1$ i $t_2 = \frac{3}{4}$. Vratimo se u supstituciju i riješimo jednadžbe:

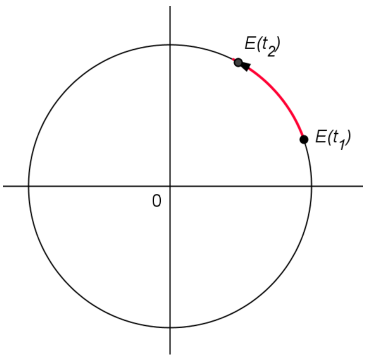
$tgx = -1$ i $tgx = \frac{3}{4}$. Rješenja prve jednadžbe su $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, a druge $x = 0.6435 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2.3. TRIGONOMETRIJSKE NEJEDNADŽBE

Realni intervali na brojevnoj kružnici

Realni intervali prikazani na brojevnoj kružnici su lukovi kružnice. Kako početna granica intervala mora biti manja od završne, intervali su orijentirani suprotno od smjera kazaljke na satu.

intervali na brojevnoj kružnici



Dvije točke $E(t_1)$ i $E(t_2)$ ne određuju samo jedan interval realnih brojeva već dva osnovna $[t_1, t_2]$ ili $\langle t_2, t_1 \rangle$ i još beskonačno mnogo čije se granice razlikuju od t_1 i t_2 za $k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, tako da se osnovni interval $[t_1, t_2]$ podudara s intervalom $[t_1 + k \cdot 2\pi, t_2 + k \cdot 2\pi]$, dakle točkama $E(t_1)$ i $E(t_2)$ određena je unija intervala:

$$\bigcup_{k \in Z} [t_1 + k \cdot 2\pi, t_2 + k \cdot 2\pi],$$

pri čemu je $t_1 < t_2$. Uvjet $t_1 < t_2$ postižemo dodavanjem ili oduzimanjem broja 2π.

Rješavanje osnovnih trigonometrijskih nejednadžbi

rješavanje osnovnih trigonome-trijskih nejednadžbi

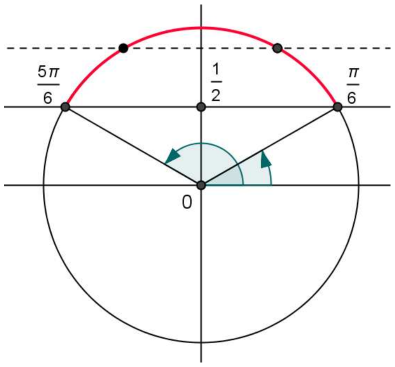
Osnovne trigonometrijske jednadžbe imaju istu strukturu kao i osnovne trigonometrijske jednadžbe, samo umjesto znaka = pišemo znak >, <, ≥ ili ≤. Rješavamo ih slično kao i osnovne jednadžbe uz obavezno predočenje na brojevnoj kružnici. Kako dvije točke $E(t_1)$ i $E(t_2)$ određuju dva orijentirana luka, odnosno dva intervala potrebno je odrediti kojem od njih pripadaju rješenja nejednadžbe. Pogledajmo kako to radimo u primjerima.

Primjer 1. Riješimo trigonometrijske nejednadžbe:

a) $\sin x \geq \frac{1}{2}$

Nacrtajmo brojevnu kružnicu i naznačimo na njoj one kutove za koje je

$\sin x = \frac{1}{2}$. Unutar intervala $[0, 2\pi]$ to su kutovi $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{5\pi}{6}$.

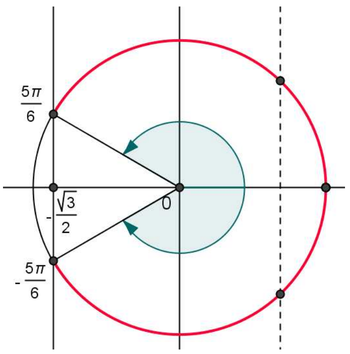


Istaknimo (obojimo crveno) onaj luk brojevne kružnice kojemu pripadaju točke kojima je vrijednost sinusa veća od $\frac{1}{2}$. Rješenje nejednadžbe unutar intervala $[0, 2\pi]$ je interval $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ pa je konačno rješenje nejednadžbe unija intervala: $\bigcup_{k\in Z}\left[\frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi, \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi\right]$, odnosno:

$$x \in \bigcup_{k\in Z}\left[\frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi, \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi\right].$$

b) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

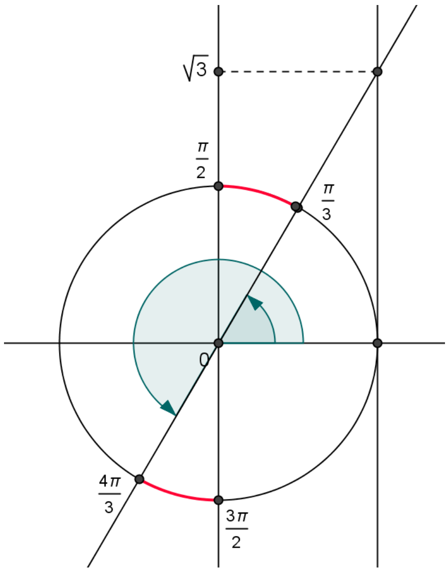
Nacrtajmo brojevnu kružnicu i naznačimo na njoj one kutove za koje je $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. To su kutovi $\frac{5\pi}{6}$ i $\frac{7\pi}{6}$.



Istaknimo (obojimo crveno) onaj luk brojevne kružnice kojemu pripadaju točke kojima je vrijednost kosinusa veća od $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Kod zapisivanja skupa rješenja pripazimo da je lijeva rubna točka intervala manja od desne. Znamo da je $E\left(\frac{7\pi}{6}\right) = E\left(\frac{7\pi}{6} - 2\pi\right) = E\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ pa je rješenje nejednadžbe interval $\left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, odnosno konačno rješenje nejednadžbe je: $x \in \bigcup_{k\in Z}\left[-\frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi, \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi\right]$.

c) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$

Nacrtajmo brojevnu kružnicu i naznačimo na njoj one kutove za koje je $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. Unutar intervala $[0, 2\pi]$ to su kutovi $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{4\pi}{3}$.



Istaknimo (obojimo crveno) onaj luk brojevne kružnice kojemu pripadaju točke kojima je vrijednost tangensa veća od $\sqrt{3}$. Dobivamo dva intervala: $\left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ i $\left\langle \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$. Sjetimo se: funkcija tangens nije definirana za realne brojeve $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Budući da je funkcija tangens periodična s temeljnim periodom π, dovoljno je za rješenje nejednadžbe zapisati: $x \in \bigcup_{k \in Z} \left\langle \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle$.

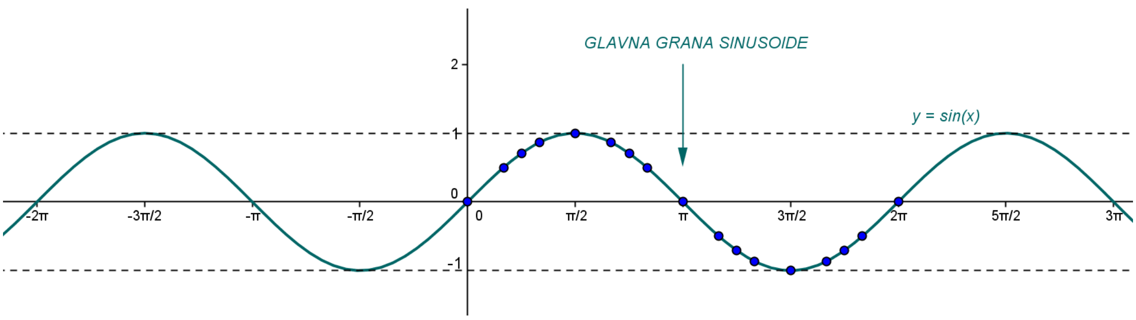
2.4. GRAFIČKI PRIKAZ TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

2.4.1. GRAFOVI FUNKCIJA SINUS I KOSINUS

Graf funkcije sinus

Graf funkcije sinus naziva se **sinusoida**. Nacrtajmo graf funkcije sinus tako da iskoristimo tablicu vrijednosti trigonometrijskih funkcija iz **Dodatka** i u koordinatnom sustavu nacrtamo točke pridružene uređenim parovima $(x, \sin x)$.

sinusoida



Iz svojstava funkcije proizlaze svojstva grafa i obrnuto:

Svojstva funkcije	Svojstva grafa
• funkcija je definirana za svaki $x \in \mathbf{R}$	• graf je neprekinuta glatka crta
• područje vrijednosti funkcije je $[-1,1]$	• graf funkcije se nalazi između pravaca $y = 1$ i $y = -1$
• funkcija je periodična s temeljnim periodom 2π, tj. $\sin(x + 2\pi) = \sin x$	• graf crtamo u intervalu $[0, 2\pi]$, a ostatak grafa nastaje translacijom nacrtanog za $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ u smjeru x osi

svojstva funkcije sinus i svojstva grafa funkcije sinus

• za $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ funkcija poprima maksimalnu vrijednost 1, a za $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ funkcija poprima minimalnu vrijednost -1	• $T_{MAX}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,1\right)$ i $T_{MIN}\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi,-1\right)$
• rješenja jednadžbe $\sin x=0$, $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ su nultočke funkcije	• graf siječe x os u točkama $(k\pi,0)$, $k\in\mathbf{Z}$

Graf funkcije $f(x)=a\sin(bx+c)$

amplituda

kružna frekvencija

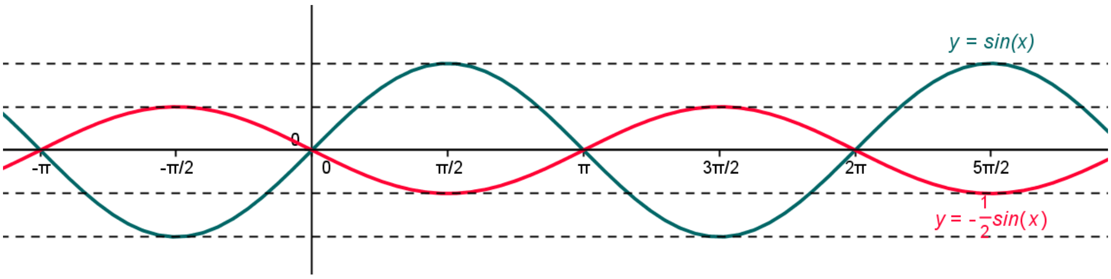
U primjenama trigonometrijskih funkcija najvažniju ulogu ima **harmonijska funkcija** $f(x)=a\sin(bx+c)$. Koeficijent a nazivamo **amplituda**, b **kružna frekvencija**, c **fazni pomak**.

a) $f(x)=a\sin x$

Graf funkcije $f(x)=a\sin x$ nastaje iz grafa funkcije $f(x)=\sin x$ tako da se ordinate grafa pomnože s a.

Primjer 1. Nacrtajmo graf funkcije $f(x)=-\frac{1}{2}\sin x$.

Najprije nacrtamo graf funkcije $f(x)=\sin x$, a zatim ordinate grafa pomnožimo s $-\frac{1}{2}$:



b) $f(x)=\sin bx$

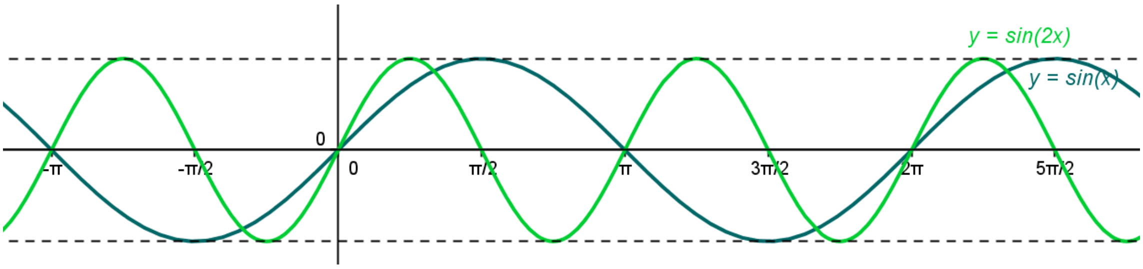
Graf funkcije je sinusoida s temeljnim periodom $P=\frac{2\pi}{b}$.

Primjer 2. Nacrtajmo graf funkcije $f(x)=\sin 2x$.

Odredimo temeljni period zadane funkcije: $P=\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Nacrtajmo je na temeljnom periodu $[0,\pi]$. Odredimo nultočke funkcije i točke minimuma i maksimuma:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin x$	0	1	0	-1	0



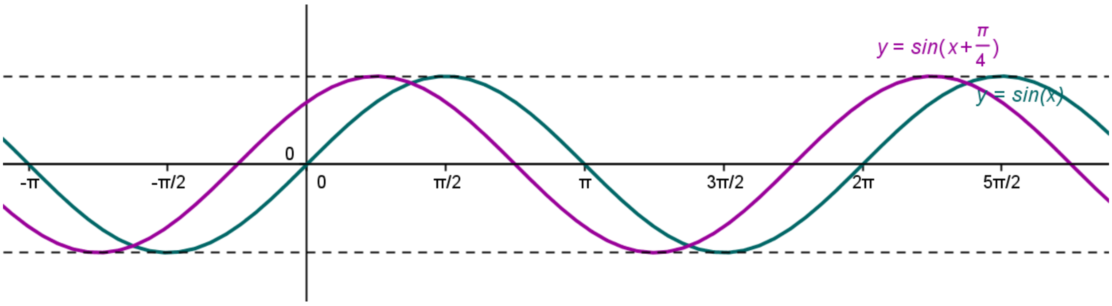
c) $f(x)=\sin(bx+c)$

Graf funkcije $f(x)=\sin(bx+c)$ nastaje translacijom grafa funkcije $f(x)=\sin bx$ za pomak $-\frac{c}{b}$ duž x osi.

Primjer 3. Nacrtajmo graf funkcije $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Graf zadane funkcije nastaje translacijom grafa funkcije $f(x)=\sin x$ za pomak:

$-\frac{c}{b}=-\frac{\frac{\pi}{4}}{1}=-\frac{\pi}{4}$ duž x osi:



Zaključak:

Graf funkcije $f(x)=a\sin(bx+c)$ nastaje iz grafa funkcije $f(x)=\sin x$ tako da:

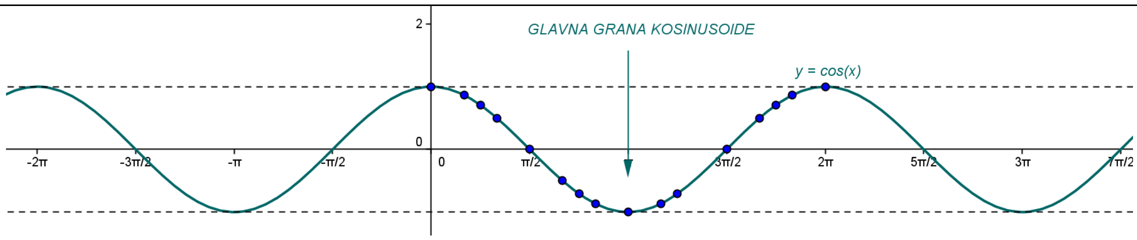
1. temeljni period od 2π promijenimo u period $P=\frac{2\pi}{b}$,
2. graf pomaknemo za $-\frac{c}{b}$ duž osi x,
3. ordinate grafa pomnožimo brojem a.

crtanje grafa harmonijske funkcije

Graf funkcije kosinus

Graf funkcije kosinus naziva se **kosinusoida**. Nacrtajmo graf funkcije kosinus tako da iskoristimo tablicu vrijednosti trigonometrijskih funkcija iz **Dodatka** i u koordinatnom sustavu nacrtamo točke pridružene uređenim parovima $(x,\cos x)$.

kosinusoida



Iz svojstava funkcije proizlaze svojstva grafa i obrnuto:

Svojstva funkcije	Svojstva grafa
• funkcija je definirana za svaki $x \in \mathbf{R}$	• graf je neprekinuta glatka crta
• područje vrijednosti funkcije je $[-1,1]$	• graf funkcije se nalazi između pravaca $y=1$ i $y=-1$
• funkcija je periodična s temeljnim periodom 2π , tj. $\cos(x+2\pi)=\cos x$	• graf crtamo u intervalu $[0,2\pi]$, a ostatak grafa nastaje translacijom nacrtanog za $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ u smjeru x osi
• za $x=2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ funkcija poprima maksimalnu vrijednost 1, a za $x=k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ funkcija poprima minimalnu vrijednost -1	• $T_{MAX}(2k\pi,1)$ i $T_{MIN}(k\pi,-1)$
• rješenja jednadžbe $\cos x = 0$, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ su nultočke funkcije	• graf siječe x os u točkama $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,0\right)$, $k \in \mathbf{Z}$

svojstva funkcije kosinus i graf funkcije kosinus

Graf funkcije $f(x)=a\cos(bx+c)$

Graf funkcije $f(x)=a\cos(bx+c)$ nastaje iz grafa funkcije $f(x)=\cos x$ tako da:

1. temeljni period od 2π promijenimo u period $P=\frac{2\pi}{b}$,
2. graf pomaknemo za $-\frac{c}{b}$ duž osi x,
3. ordinate grafa pomnožimo brojem a.

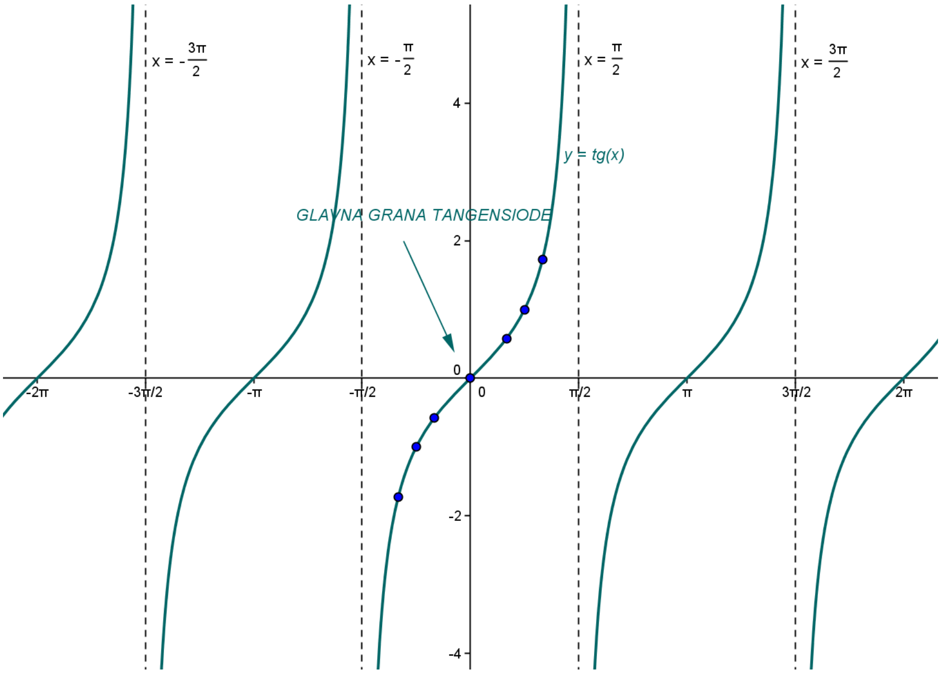
2.4.2. GRAFOVI FUNKCIJA TANGENS I KOTANGENS

Na isti način na koji smo crtali grafove funkcija sinus i kosinus, crtat ćemo grafove ostalih dviju trigonometrijskih funkcija, tangensa i kotangensa.

Graf funkcije tangens

Graf funkcije tangens naziva se **tangensoida**.
Dakle, iskoristimo i ovdje tablicu vrijednosti trigonometrijskih funkcija iz **Dodatka** i u koordinatnom sustavu nacrtamo točke pridružene uređenim parovima (x, tgx). Sjetimo se da funkcija tangens nije definirana za realne brojeve $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ i da je njezin temeljni period π. Zato je graf funkcije tangens dovoljno nacrtati na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, a ostatak grafa nastaje translacijom nacrtanog za $k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ duž x osi.

tangensoida



U točkama u kojima funkcija tangens nije definirana graf ima prekid. Pravcima $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ graf funkcije se približava, ali ih ne siječe. Nazivamo ih (vertikalnim) asimptotama funkcije tangens.

Iz svojstava funkcije proizlaze svojstva grafa i obrnuto:

Svojstva funkcije	Svojstva grafa
• funkcija je definirana za svaki $x\in\mathbf{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\right\}$	• za $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ ne postoje točke grafa, tj. graf ima prekide
• područje vrijednosti funkcije je čitavi skup $\mathbf{R}$, funkcija tangens nema ekstrema (minimalne i maksimalne vrijednosti)	• u točkama $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ vrijednost funkcije je $\pm\infty$ pa su pravci $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ su (vertikalne) asimptote grafa

svojstva funkcije tangens i svojstva grafa funkcije tangens

• funkcija je periodična s temeljnim periodom π, tj. $\mathrm{tg}(x+\pi)=\mathrm{tg}\,x$	• graf crtamo u intervalu širine perioda π, npr. u intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ između dvije asimptote, a ostatak grafa nastaje translacijom nacrtanog za $k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ u smjeru x osi
• rješenja jednadžbe $\mathrm{tg}\,x=0$, $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ su nultočke funkcije	• graf siječe x os u točkama $(k\pi,0)$, $k\in\mathbf{Z}$

Analogno crtamo graf funkcije kotangens i analiziramo svojstva.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Riješite osnovne trigonometrijske jednadžbe:

a) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

b) $2\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{2\pi}{3}\right)-1=0$,

c) $3+\sqrt{3}tg\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=0$,

d) $ctg\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)-1=0$

e) $\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=0$,

f) $\cos 3x\cos x=\sin 4x\sin x$,

g) $\dfrac{tgx+tg\frac{\pi}{12}}{1-tgx\cdot tg\frac{\pi}{12}}=1$.

2. Riješite trigonometrijske jednadžbe koje se svode na algebarske:
   a) $2\cos^2 x-7\cos x+3=0$,
   b) $2\cos^2 x-5\sin x-4=0$,
   c) $8\sin^2 x+6\cos x-3=0$,
   d) $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos x$,
   e) $5ctg^2x-8ctgx+3=0$,
   f) $2tg^2x-16tgx+3=0$,
   g) $\sqrt{3}tg^2x-4tgx+\sqrt{3}=0$,
   h) $2ctg3x+tg3x+3=0$.

3. Riješite homogene trigonometrijske jednadžbe:
   a) $3\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$,
   b) $2\cos x-\sqrt{2}\sin x=0$,
   c) $\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0$,
   d) $4\cos^2 2x-7\sin 2x\cos 2x+3\sin^2 2x=0$,
   e) $2\sin^2 x+5\sin x\cos x+\cos^2 x=4$,
   f) $2\sin^2 4x+4\sin 4x\cos 4x-4\cos^2 4x=1$,
   g) $3\sin^2 x-10\sin x\cos x+23\cos^2 x-2=0$.

4. Riješite linearne jednadžbe:
   a) $3\sin x + 4\cos x = 5$,
   b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$,
   c) $\sin 2x + 4\cos 2x = 3$.

5. Riješite trigonometrijske nejednadžbe:

   a) $\sin\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{1}{2}$,
   b) $2\sqrt{3}\cos\left(3x - \frac{5\pi}{6}\right) - 3 \geq 0$,
   c) $\sqrt{3} + tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$,
   d) $\sqrt{3}ctg\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 0$,

6. Nacrtajte graf funkcije:
   a) $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$,
   b) $f(x) = -3\cos\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{16}\right)$.

7. Koliki je zbroj rješenja jednadžbe $\cos 10x = \frac{1}{2}$ u intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$?
8. Koliki je zbroj rješenja jednadžbe $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$ u intervalu $[0, 2\pi]$?
9. Koliki je zbroj rješenja jednadžbe $\sqrt{3}tg^2 x - 4tg^2 x + \sqrt{3} = 0$ u intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$?
10. Koliko rješenja u intervalu $\left\langle -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right\rangle$ ima jednadžba

    $\cos\frac{x}{2}\cos 2x - \sin\frac{x}{2}\sin 2x = -1$?

3. PRIMJENA TRIGONOMETRIJE U PLANIMETRIJI

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Kako glasi poučak o sinusima i poučak o kosinusu?*
2. *Kako primijeniti trigonometriju na rješavanje kosokutnog trokuta?*
3. *Kako primijeniti trigonometriju na rješavanje četverokuta?*

3.1. TRIGONOMETRIJA KOSOKUTNOG TROKUTA

kosokutan trokut

Trokut koji nije pravokutan naziva se **kosokutan trokut**. Kosokutan trokut određen je sa svoja tri elementa (najviše dva kuta).
„Riješiti trokut“ znači iz zadanih podataka odrediti njegove nepoznate elemente. Osnovni elementi trokuta su duljine stranica a, b i c i mjere kutova α, β i γ. Da bismo mogli odrediti nepoznate elemente, najprije moramo ustanoviti kakve

veze postoje između tih elemenata. Temeljne veze između duljina stranica i mjera kutova iskazane su dvama poučcima: **poučkom o sinusima** i **poučkom o kosinusu**, koje ćemo ovdje navesti bez dokaza (dokaz pogledati u navedenoj literaturi).
Navest ćemo i u kojim situacijama koristimo koji poučak. Prema poučcima o sukladnosti trokuta znamo da trokut može biti zada osnovnim elementima na jedan od sljedećih načina:

a) zadana je stranica i dva kuta,
b) zadane su dvije stranice i kut nasuprot veće od njih,
c) zadane su dvije stranice i kut između njih,
d) zadane su sve tri stranice.

3.1.1. POUČAK O SINUSIMA

Neka su a, b i c duljine stranica trokuta, a α, β i γ mjere kutova tog trokuta.

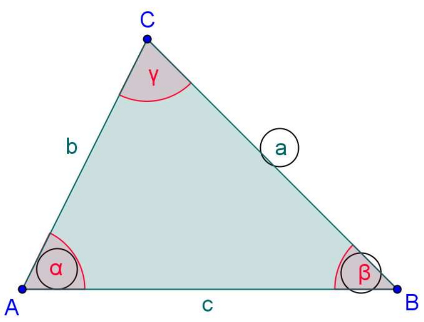
Poučak o sinusima:
U svakom su trokutu omjeri duljina stranica i sinusa tim stranicama nasuprotnih kutova jednaki:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

poučak o sinusima

Kako bi odredili nepoznate elemente trokuta, poučak o sinusima koristimo kada je u trokutu poznata jedna stranica i dva kuta ili dvije stranice i kut nasuprot veće stranice.

Primjer 1. U trokutu je zadano $\alpha=50°$, $\beta=72°$ i $a=4.6$ cm. Odredimo duljine preostalih dviju stranica.



Odredimo najprije mjeru trećeg kuta trokuta:

$$\gamma=180°-(\alpha+\beta)=58°.$$

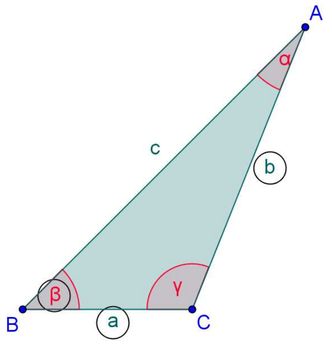
Preostale dvije stranice računamo iz poučka o sinusima:

Iz $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$ slijedi $b=\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{4.6\cdot\sin 72°}{\sin 50°}=5.7$ cm.

Analogno, iz $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$ dobivamo $c=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{4.6\cdot\sin 58°}{\sin 50°}=5.1$ cm.

Primjer 2. Odredimo nepoznate elemente u trokutu ako je poznato $a=3$ cm, $b=5$ cm i $\beta=50°$.

Zadane su dvije stranice i kut nasuprot veće stranice. U tom je slučaju trokut jednoznačno određen. Primjenom poučka o sinusima dobivamo:



$\sin\alpha = \frac{a\cdot\sin\beta}{b} = \frac{3\cdot\sin 30°}{5} = 0.3$ pa je $\alpha = 17°28'$.

Sada je:

$$\gamma = 180° - (\alpha+\beta) = 132°32'$$

i konačno:

$$c = \frac{b\cdot\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{5\cdot\sin 132°32'}{\sin 30°} = 7.37 \text{ cm.}$$

Ako je zadan kut nasuprot manje stranice, trokut nije jednoznačno određen. Tada zadatak može imati dva, jedno ili nijedno rješenje.

Zato kada su poznati kutovi trokuta, najprije računamo duljinu stranice nasuprot najvećem kutu.

3.1.2. POUČAK O KOSINUSU

Već smo spomenuli da duljine stranica trokuta i mjere njegovih kutova povezuje još jedan temeljni poučak.

Neka su a, b i c duljine stranica trokuta, a α, β i γ mjere kutova tog trokuta.

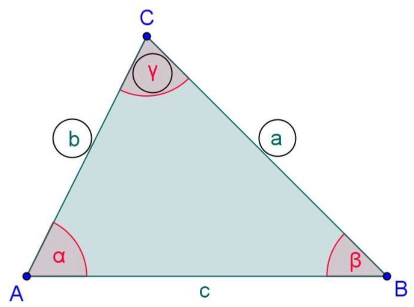
Poučak o kosinusu:
Kvadrat duljine stranice u trokutu jednak je zbroju kvadrata duljina drugih dviju stranca, umanjen za dvostruki umnožak duljina tih stranica i kosinusa kuta između njih:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

poučak o kosinusu

Kako bi odredili nepoznate elemente trokuta, poučak o kosinusu koristimo kada su u trokutu zadane dvije stranice i kut između njih ili sve tri stranice.

Primjer 1. Odredimo nepoznate elemente u trokutu ako je zadano $a = 4.3$ cm, $b = 5.6$ cm i $\gamma = 52°$.



Zadanim podacima trokut je jednoznačno određen. Duljinu treće stranice odredimo pomoću poučka o kosinusu:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma =$$
$$= 4.3^2 + 5.6^2 - 2\cdot 4.3\cdot 5.6\cdot\cos 52° = 20.1997$$

pa je $c = 4.49$ cm.

Sada su nam poznate duljine svih triju stranica trokuta i mjere jednog kuta. Da bismo odredili mjere preostalih kutova možemo uporabiti bilo poučak o sinusima, bilo poučak o kosinusu. Odredimo mjere kutova koristeći poučak o kosinusu. Smijemo potražiti mjeru bilo kojeg od preostala dva kuta bez straha da će doći do pogrešnog odabira. Npr. vrijedi:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4.3^2 + 4.49^2 - 5.6^2}{2 \cdot 4.3 \cdot 4.49} = 0.18879$$

pa je $\beta = 79°07'$. Slijedi da je $\alpha = 48°53'$.

Računamo li kutove primjenom poučka o sinusima, najprije moramo odrediti kut α jer ćemo tada biti u situaciji kada su zadane dvije stranice i kut nasuprot veće čime je trokut jednoznačno određen.

Primjer 2. Odredimo mjere kutova trokuta ako su zadane duljine njegovih stranica $a = 5$ cm, $b = 6$ cm i $c = 8$ cm.

Odredimo najprije kut γ (najveći kut u trokutu):

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 6^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = -0.05.$$

Kako je kosinus negativan, kut γ je tupi kut: $\gamma = 92°52'$.
Drugi kut, npr. kut β računamo poučkom o sinusima:

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\gamma}{c} = \frac{6 \cdot \sin 92°52'}{8} = 0.74906$$

pa je $\beta = 48°31'$. Slijedi da je $\alpha = 180 - (\beta + \gamma) = 38°37'$.

3.1.3. PRIMJENA TRIGONOMETRIJ NA RJEŠAVANJE KOSOKUTNOG TROKUTA

Pogledajmo sada kako se navedeni poučci mogu primijeniti u rješavanju planimetrijskih zadataka, najprije u računanju različitih elemenata trokuta. Uz osnovne elemente trokuta često se susrećemo s pomoćnim elementima: visinama trokuta, težišnicama, polumjerom trokutu opisane i upisane kružnice, opsegom, poluopsegom, površinom itd.

U trokutu ABC rabit ćemo sljedeće standardne oznake:

a, b, c	… duljine stranica trokuta
α, β, γ	… mjere kutova trokuta
v_a, v_b, v_c	… duljine visina trokuta
t_a, t_b, t_c	… duljine težišnica trokuta
R	… duljina polumjera trokutu opisane kružnice
r	… duljina polumjera trokutu upisane kružnice
s	… poluopseg
P	… površina trokuta

Bez dokaza (dokaz pogledati u navedenoj literaturi) navodimo sljedeće formule:

Površina trokuta jednaka je polovici umnoška duljina dviju stranica i sinusa kuta između njih:

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta .$$

Površina trokuta kojemu su poznate mjere kutova i duljina jedne stranice jednaka je:

$$P = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta} = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma} .$$

Ako su poznate duljine stranica trokuta, njegovu površinu računamo po Heronovoj formuli:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} ,$$

gdje je $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ poluopseg trokuta.

formule za površinu trokuta

U svakom su trokutu omjeri duljina stranica i sinusa tim stranicama nasuprotnih kutova jednaki duljini promjera trokutu opisane kružnice:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R .$$

Površinu trokuta možemo računati i ako su poznate duljina polumjera trokutu opisane ili upisane kružnice:

$$P = rs \text{ i } P = \frac{abc}{4R} .$$

Primjer 1. Ako je u trokutu *ABC* zadano $c = 10$ cm, $R = 13$ cm i $\alpha = 61°22'33''$, odredi duljine ostalih stranica i mjere ostalih kutova trokuta. Kolika je površina tog trokuta?

Najprije nalazimo mjeru kuta γ. Iz $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ slijedi:

$$\sin\gamma = \frac{c}{2R} = \frac{10}{2\cdot 13} = 0.38462$$

pa je $\gamma = 22°37'11''$. Slijedi $\beta = 180° - (\alpha+\gamma) = 96°00'16''$

Sada je:

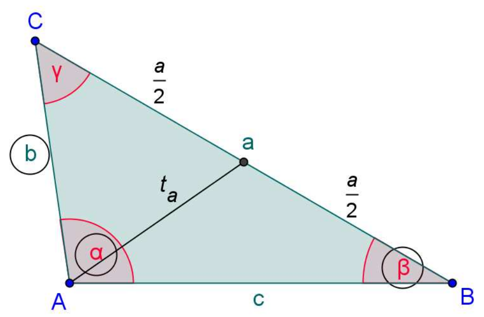
$$a = \frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{10\cdot\sin 61°22'33''}{\sin 22°37'11''} = 22.28 \text{ cm i}$$

$$b = \frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{10\cdot\sin 96°00'16''}{\sin 22°37'11''} = 26.13 \text{ cm.}$$

Površina trokuta je:

$$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 26.13\cdot 10\cdot\sin 61°22'33'' = 114.68 \text{ cm}^2.$$

Primjer 2. Odredi duljinu težišnice t_a trokuta *ABC* ako je $b = 9$ cm, $\alpha = 103°26'$ i $\beta = 41°16'$.



Odredimo najprije mjeru trećeg kuta trokuta:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 35°18'.$$

Primjenom poučka o sinusima dobivamo:

$$a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{9 \cdot \sin 103°26'}{\sin 41°16'} = 13.27 \text{ cm.}$$

Sada primjenom poučka o kosinusu dobivamo:

$$t_a^{\,2} = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2b \cdot \frac{a}{2} \cos\gamma = 9^2 + \left(\frac{13.27}{2}\right)^2 - 9 \cdot 13.27 \cdot \cos 35°18' = 27.55$$

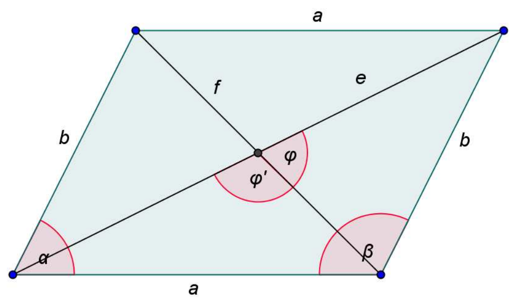
pa je $t_a = 5.25$ cm.

3.2. PRIMJENA TRIGONOMETRIJE NA RJEŠAVANJE ČETVEROKUTA

Paralelogram

Rješavanje paralelograma najčešće se svodi na rješavanje trokuta na koji taj paralelogram dijeli jedna ili obje njegove dijagonale.

rješavanje paralelograma



Označimo s a i b duljine stranica paralelograma, e i f duljine dijagonala, α i β mjere kutova paralelograma, a φ i φ' mjere kutova između dijagonala paralelograma.

Vrijedi:

$$\alpha + \beta = 180° \text{ i } \varphi + \varphi' = 180°.$$

Površinu paralelograma računamo preko duljina njegovih stranica i kuta između njih:

$$P = ab\sin\alpha,$$

ili preko duljina dijagonala i kuta među njima:

$$P = \frac{1}{2} ef \sin\varphi.$$

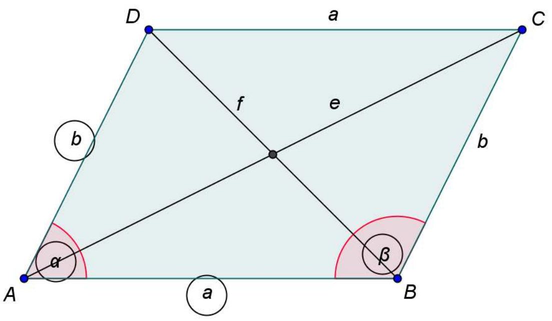
površina paralelograma

Primjer 1. Površina paralelograma jednaka je 62.6 cm², a duljine stranica jednake su 14.2 cm i 7 cm. Kolike su duljine dijagonala paralelograma?

Zadano je $a = 14.2$ cm, $b = 7$ cm i $P = 62.6$ cm². Iz formule za površinu paralelograma $P = ab\sin\alpha$ dobivamo:

$$\sin\alpha = \frac{P}{ab} = \frac{62.6}{14.2 \cdot 7} = 0.62978$$

pa je $\alpha = 39°02'01''$. Sada je $\beta = 180° - \alpha = 140°57'59''$.



Primjenom poučka o kosinusu na trokut ABD dobivamo:

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = 173.4284$$

pa je $f = 13.17$ cm.

Iz trokuta ABC slijedi:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta =$$
$$= a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha = 327.8516$$

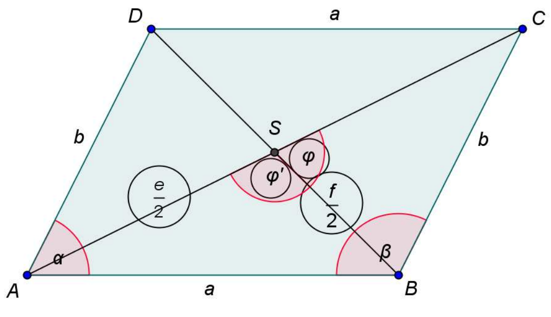
pa je $e = 18.11$ cm.

Primjer 2. Površina paralelograma jednaka je 22.3 cm², a duljine dijagonala jednake su 7.8 cm i 12 cm. Kolike su duljine stranica paralelograma?

Zadano je $e = 12$ cm, $f = 7.8$ cm i $P = 22.3$ cm². Iz formule za površinu paralelograma $P = \frac{1}{2}ef\sin\varphi$ dobivamo:

$$\sin\varphi = \frac{2P}{ef} = \frac{2 \cdot 22.3}{12 \cdot 7.8} = 0.47649$$

pa je $\varphi = 28°27'24''$. Sada je $\varphi' = 180° - \varphi = 151°32'35''$.



Primjenom poučka o kosinusu na trokut ABS dobivamo:

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos\varphi' =$$
$$= 92.3554$$

pa je $a = 9.61$ cm.

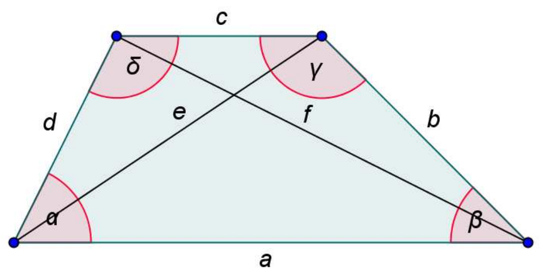
Iz trokuta ABC slijedi:

$$b^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos\varphi = 10.0645$$

pa je $b = 3.17$ cm.

Raznostraničan trapez

rješavanje raznostraničnog trapeza

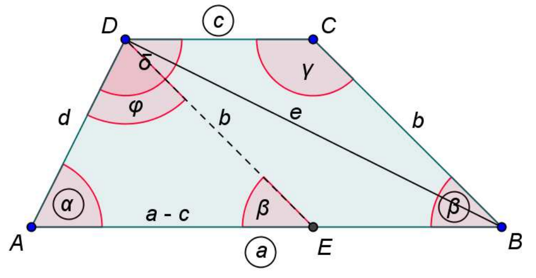


Označimo s a, b, c i d duljine stranica trapeza, e i f duljine dijagonala, α i β, γ, δ mjere kutova trapeza.

Vrijedi:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°,\ \alpha+\delta=180° \text{ i } \beta+\gamma=180°.$$

Primjer 1. Odredi duljine krakova b i d trapeza i duljinu dijagonale $e=|BD|$ ako je $a=30$ cm, $c=12$ cm, $\alpha=42°42'$ i $\beta=53°35'$.



U trokutu AED je:
$\varphi=180°-(\alpha+\beta)=83°43'$ i
$a-c=18$ cm.

Primjenom poučka o sinusima na isti trokut dobivamo:

$$\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{a-c}{\sin\varphi} \text{ pa je } b=\frac{(a-c)\cdot\sin\alpha}{\sin\varphi}=12.28 \text{ cm.}$$

Slično, iz $\frac{d}{\sin\beta}=\frac{a-c}{\sin\varphi}$ slijedi da je $d=\frac{(a-c)\cdot\sin\beta}{\sin\varphi}=14.57$ cm.

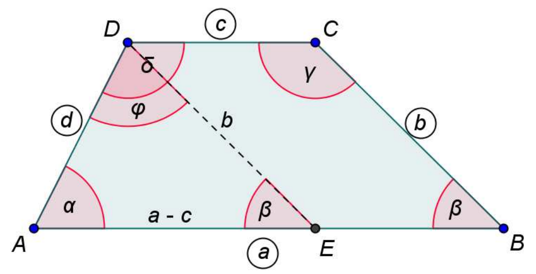
Primjenom poučka o kosinusu iz trokuta ABD dobivamo:

$$e^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha=469.8226$$

pa je $e=21.68$ cm.

Primjer 2. Odredi mjere kutova trapeza kojemu su osnovice duljine 6 cm i 4 cm, a krakovi duljine 3 cm i 4 cm.

Zadano je $a=6$ cm, $c=4$ cm, $b=3$ cm i $d=4$ cm.



Iz trokuta AED primjenom poučka o kosinusu računamo:

$$\cos\alpha=\frac{(a-c)^2+d^2-b^2}{2d(a-c)}=\frac{2^2+4^2-3^2}{2\cdot4\cdot2}=$$
$$=0.6875$$

pa je $\alpha=46°34'$.

Analogno,

iz $\cos\beta = \dfrac{(a-c)^2 + b^2 - d^2}{2b(a-c)} = \dfrac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2\cdot 3\cdot 2} = -0.25$ slijedi da je $\beta = 104°29'$.

Iz $\alpha + \delta = 180°$ i $\beta + \gamma = 180°$ dobivamo $\delta = 133°26'$ i $\gamma = 75°31'$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Ako je u trokutu *ABC* zadano $b = 10$ cm, $R = 15.5$ cm i $\alpha = 41°11'11''$, odredite duljine ostalih stranica i mjere ostalih kutova trokuta. Kolika je površina tog trokuta?
2. Ako je u trokutu *ABC* zadano $a = 5$ cm, $R = 8.2$ cm i $\chi = 30°31'32''$, odredite duljine ostalih stranica i mjere ostalih kutova trokuta. Kolika je površina tog trokuta?
3. Odredite duljinu težišnice t_a trokuta *ABC* ako je $c = 5.3$ cm, $\alpha = 81°23'$ i $\chi = 22°33'$.
4. Odredite duljinu težišnice t_c trokuta *ABC* ako je $b = 4.6$ cm, $\beta = 52°25'$ i $\chi = 39°14'$.
5. Površina paralelograma jednaka je 22.2 cm^2, a duljine dijagonala jednake su 4.7 cm i 6 cm. Kolike su duljine stranica paralelograma?
6. Površina paralelograma jednaka je 66.5 cm^2, a duljine stranica jednake su 10.8 cm i 4.1 cm. Kolike su duljine dijagonala paralelograma?
7. Odredite mjere kutova i duljine dijagonala trapeza kojemu su osnovice duljine 12 cm i 8 cm, a krakovi duljine 6 cm i 8 cm.
8. Odredite duljine krakova b i d trapeza, te duljinu dijagonale $e = |BD|$ ako je $a = 20.4$ cm, $c = 12$ cm, $\alpha = 31°53'01''$ i $\beta = 37°54'$.
9. Duljina je kraće stranice deltoida 8 cm, a duljina njegove dulje dijagonale 20 cm. Kolika je duljina dulje stranice deltoida ako dvije stranice različitih duljina čine kut $\alpha = 98°12'$?

4. VEKTORI U RAVNINI

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. *Što je vektor i koje pojmove vežemo uz vektore?*
2. *Kako operiramo s vektorima (definirat ćemo zbrajanje i oduzimanje vektora, množenje vektora skalarom, skalarni umnožak vektora)?*
3. *Kako vektore smjestiti u koordinatnu ravninu?*

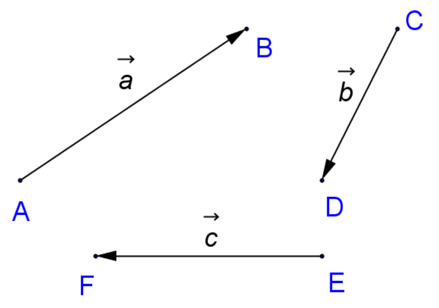
4.1. OSNOVNI POJMOVI O VEKTORIMA

vektor

početna točka

završna točka

Vektor je usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ u kojoj razlikujemo **početnu točku** (**hvatište**) A i **završnu točku** (**kraj**) B. Vektor crtamo kao običnu dužinu, ali tako da završnu točku označimo strelicom.



Vektore označavamo s $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ ili samo malim slovom iznad kojeg je postavljena strelica: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, itd.

Skup svih vektora u ravnini označavamo s V^2.

duljina smjer orijentacija

Vektor je jednoznačno određen ako mu znamo:

1. **duljinu**,
2. **smjer**,
3. **orijentaciju**.

duljina vektora

Duljina (modul, apsolutna vrijednost, norma) **vektora** $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ je udaljenost između njegove početne i završne točke. Duljinu vektora označavamo s $|\vec{a}|$, odnosno $|\overrightarrow{AB}|$ pa vrijedi:

$$|\vec{a}| = d(A, B) = |AB|.$$

jedinični vektor

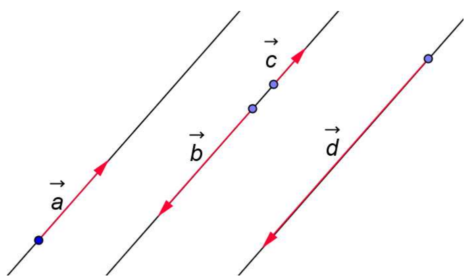
nulvektor

Vektor kojemu je duljina $|\vec{a}| = 1$ nazivamo **jedinični vektor** ili **ort**.

Vektor kojemu se podudaraju početna i završna točka nazivamo **nulvektor** i označavamo $\vec{0}$. Njegova je duljina 0 i to je jedini vektor duljine 0. Tako je $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ za bilo koju točku A.

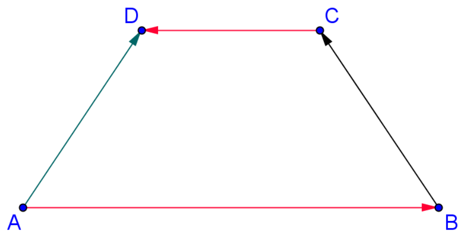
Pravac određen točkama A i B nazivamo pravac **nositelj** vektora $\overrightarrow{AB}$.

kolinearni vektori



Ako dva vektora leže na paralelnim pravcima, za njih kažemo da imaju **isti smjer** ili da su **kolinearni**. U suprotnom, govorimo o nekolinearnim vektorima.

Primjer 1.



Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ imaju isti smjer, ali različitu duljinu.
Vektori $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$ nisu istog smjera, ali imaju jednaku duljinu.

Vektor kojemu poznajemo duljinu i pravac nositelj još nije potpuno određen – moramo mu poznavati još i **orijentaciju**.

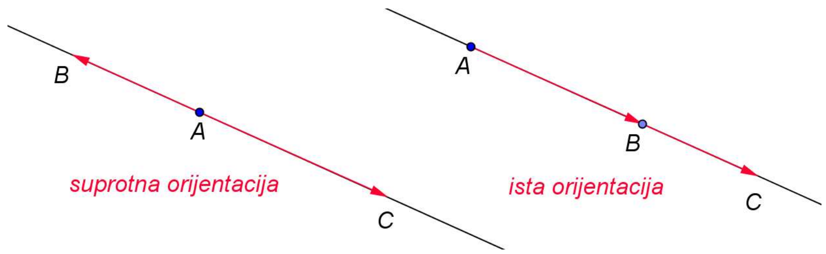
orijentacija

O jednakoj ili suprotnoj orijentaciji vektorima govorimo samo kada imamo kolinearne vektore.

suprotna orijentacija

Kažemo da kolinearni vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ imaju **suprotnu orijentaciju** ako se točka A nalazi između točaka B i C, inače kažemo da imaju **istu orijentaciju**.

ista orijentacija

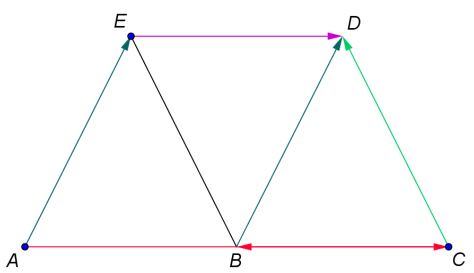


Ako kolinearni vektori nemaju isti pravac nositelj, nego paralelne pravce, onda ih paralelnim pomakom možemo dovesti do položaja u kojem imaju zajednički početak pa se orijentacija prenosi na prirodan način.
Na ranijoj slici uz objašnjenje smjera vektora, vektori $\vec{a}$ i $\vec{c}$ te $\vec{b}$ i $\vec{d}$ imaju istu orijentaciju, a npr. vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ili $\vec{c}$ i $\vec{d}$ imaju suprotnu orijentaciju.

Jednakost vektora:
Dva su vektora jednaka ako se podudaraju u duljini, smjeru i orijentaciji.

jednakost vektora

Primjer 2. Odredimo koji su od navedenih vektora jednaki:



a) $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{ED}$: imaju isti smjer i orijentaciju, ali različitu duljinu pa nisu jednaki.
b) $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{CD}$: imaju istu duljinu, ali različiti smjer pa nisu jednaki.
c) $\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{ED}$: imaju istu duljinu i smjer, ali različitu orijentaciju pa nisu jednaki.
d) $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{BD}$: imaju istu duljinu, smjer i orijentaciju pa su jednaki.

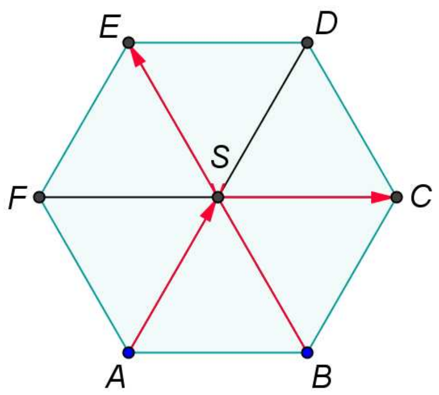
Za dva vektora kažemo da su **suprotni** ako imaju istu duljinu i smjer, a suprotnu orijentaciju. Suprotan vektor vektora $\vec{a}$ označavamo s $-\vec{a}$.

suprotni vektori

Vektor suprotan vektoru $-\vec{a}$ je $\vec{a}$ pa vrijedi $-\left(-\vec{a}\right)=\vec{a}$.

Vektor suprotan vektoru $\overrightarrow{AB}$ je $\overrightarrow{BA}$ jer imaju istu duljinu i smjer, a suprotnu orijentaciju. Zato je $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

Primjer 3. Nacrtajmo pravilni šesterokut $ABCDEF$. Neka je S sjecište njegovih dijagonala.



a) Ispišimo sve vektore koji su jednaki vektoru $\overrightarrow{AS}$: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FE}$ i $\overrightarrow{SD}$.
b) Ispišimo sve vektore koji imaju isti smjer kao vektor $\overrightarrow{BE}$: $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{SE}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{SB}$ i $\overrightarrow{ES}$.
c) Ispišimo sve vektore koji imaju jednaku orijentaciju kao i vektor $\overrightarrow{SC}$: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{FS}$ i $\overrightarrow{FC}$.
d) Ispišimo sve vektore koji su suprotni vektoru $\overrightarrow{SC}$: $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{SF}$ i $\overrightarrow{DE}$.

Temeljni stavak o vektorima:
Neka je O bilo koja točka ravnine (ili prostora) i $\overrightarrow{AB}$ zadani vektor. Tada postoji jedinstvena točka T u ravnini (ili prostoru) za koju je $\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{AB}$.
Drugim riječima, za svaki vektor možemo odrediti njemu jednak, a koji ima početak u unaprijed zadanoj točki O.

temeljni stavak o vektorima

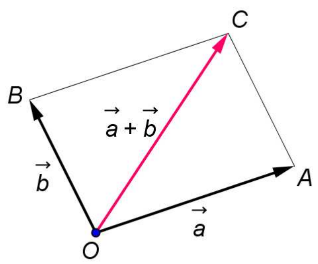
Vektor $\overrightarrow{OT}$ nazivamo **radijvektor** točke T.

radijvektor točke

4.2. ZBRAJANJE VEKTORA

Vektore zbrajamo pomoću pravila trokuta ili pravila paralelograma.

Zbroj dvaju vektora – pravilo paralelograma



Zbroj dvaju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ s istim početkom O je vektor $\overrightarrow{OC}$ takav da je $\overline{OC}$ dijagonala paralelograma $OACB$. Pišemo:

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

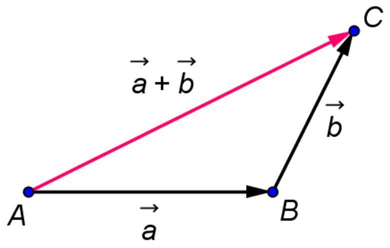
zbrajanje vektora po pravilu paralelogra-ma

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su **ulančani** ako se završetak vektora podudara s početkom drugog.

ulančani vektori

Zbroj dvaju vektora – pravilo trokuta

zbrajanje vektora po pravilu trokuta



Zbroj dvaju ulančanih vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ je vektor $\overrightarrow{AC}$ koji spaja početnu točku prvog vektora sa završnom točkom drugog vektora. Pišemo:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

Svojstva operacije zbrajanja vektora:

1. zbrajanje vektora je **komutativno**, tj. za bilo koja dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,
2. zbrajanje vektora je **asocijativno**, tj. za bilo koja tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vrijedi: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Iz definicije zbrajanja slijedi da je zbroj suprotnih vektora jednak nulvektoru, tj:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0},$$

odnosno

$$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\left(-\vec{a}\right)+\vec{a}=\vec{0}.$$

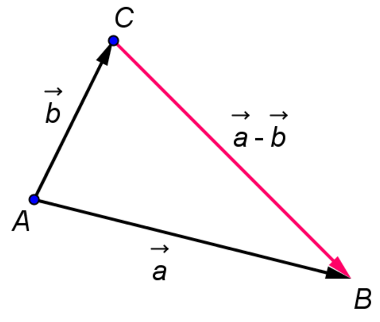
Dalje, nulvektor ima slična svojstva koje ima i broj nula za operaciju zbrajanja brojeva. Ako je $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ neki vektor, onda je:

$$\vec{0}+\vec{a}=\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}.$$

Oduzimanje vektora

Razlika vektora definira se kao zbroj sa suprotnim vektorom:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

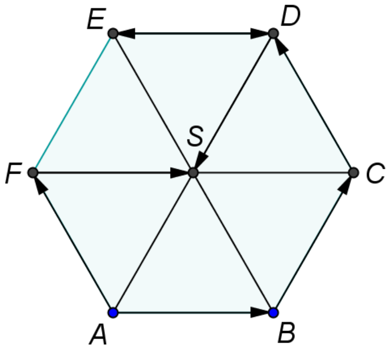


Razlika dvaju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ s istom početnom točkom je vektor $\overrightarrow{CB}$ koji spaja završnu točku drugog vektora sa završnom točkom prvog vektora. Pišemo:

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}.$$

oduzimanje vektora

Primjer 1. Točke A, B, C, D, E i F vrhovi su pravilnog šesterokuta, a točka S njegovo središte. Odredimo naznačena zbrojeve i razlike vektora.



Iskoristimo definicije zbrajanja (pravilom trokuta) i oduzimanja vektora te temeljni stavak o vektorima koji nam omogućava da vektore ulančamo ili ih smjestimo u istu početnu točku:

a) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FS}=\overrightarrow{AS}$,

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SE}=\overrightarrow{AE}$,

c) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}$,

d) $\overrightarrow{CS}-\overrightarrow{ES}=\overrightarrow{SF}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{BF}$.

4.3. MNOŽENJE VEKTORA SKALAROM

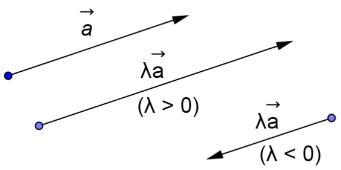
Umnožak vektora $\vec{a}$ skalarom λ, $\lambda \in \mathbf{R}$, je vektor $\lambda\vec{a}$ sa svojstvima:

– duljina mu je jednaka umnošku apsolutne vrijednosti skalara i duljine vektora: $\left|\lambda\vec{a}\right| = |\lambda| \cdot \left|\vec{a}\right|$,

– smjer mu je jednak smjeru vektora $\vec{a}$,

– orijentacija mu je jednaka orijentaciji vektora $\vec{a}$ ako je $\lambda > 0$, a suprotna orijentaciji vektora $\vec{a}$ ako je $\lambda < 0$.

množenje vektora skalarom



Za navedene računske operacije s vektorima, zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom, vrijede svojstva koje vrijede i za računske operacije s realnim brojevima. Vrijedi npr:

$$5\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)-3\left(2\vec{a}-4\vec{b}\right)=5\vec{a}+15\vec{b}-6\vec{a}+12\vec{b}=-\vec{a}+27\vec{b}.$$

Ranije smo definirali jedinični vektor. Podijelimo li bilo koji vektor $\vec{a}$, različit od nulvektora, njegovom duljinom dobit ćemo jedinični vektor $\overrightarrow{a_0}$:

$$\overrightarrow{a_0}=\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}.$$

jedinični vektor

Kriterij kolinearnosti

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ $\left(\vec{b}\neq\vec{0}\right)$ su kolinearni ako i samo ako postoji skalar λ takav da vrijedi: $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

kriterij kolinearnosti

4.4. LINEARNA NEZAVISNOST VEKTORA

Linearna kombinacija dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je svaki izraz oblika:

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}.$$

Skalare α i β nazivamo **koeficijentima** linearne kombinacije. Ako su oba skalara, α i β jednaka nuli, onda je linearna kombinacija jednaka nulvektoru.

linearna kombinacija vektora

Dva su vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **linearno nezavisna** ako iz jednakosti

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$$

nužno slijedi da je $\alpha=\beta=0$.

linearna nezavisnost

U suprotnom, vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su **linearno zavisni**. Tada postoji linearna kombinacija jednaka nulvektrou kojoj svi koeficijenti nisu jednaki nuli.

linearna zavisnost

Za svaka dva linearno nezavisna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kažemo da čine bazu vektorskog prostora V^2.

Dva su vektora kolinearna ako i samo ako su linearno zavisni, odnosno svaka dva nekolinearna vektora su linearno nezavisna.

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisni vektori. Svaki se vektor $\vec{c}$ može prikazati kao **linearna kombinacija** vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}.$$

Kažemo da smo vektor $\vec{c}$ **rastavili na komponente** po vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Koeficijenti α i β linearne kombinacije nazivaju se **koordinate** vektora $\vec{c}$ u prikazu pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

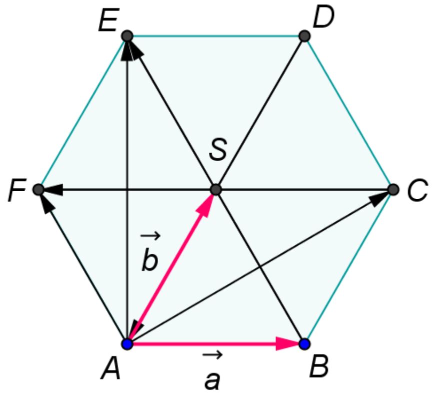
rastavljanje vektora na komponente

Prikaz vektora $\vec{c}$ pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je **jedinstven**.

Primjer 1. Neka je pravilan šesterokut $ABCDEF$ i S središte njemu opisane kružnice. Ako je $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ $\overrightarrow{AS}=\vec{b}$, izrazimo vektore $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AE}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Iz prethodnih izlaganja znamo da je $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FS}=\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{ED}=\vec{a}$ i

$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}=\vec{b}$.



Sada je:

$\overrightarrow{DA}=-2\vec{b}$,

$\overrightarrow{CF}=-2\vec{a}$,

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SF}=\vec{b}-\vec{a}$,

$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BS}=2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AS}\right)=-2\vec{a}+2\vec{b}$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$,

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=2\vec{b}-\vec{a}$.

Kriterij jednakosti vektora

Dva su vektora $\vec{a}=\alpha_1\vec{m}+\beta_1\vec{n}$ i $\vec{b}=\alpha_2\vec{m}+\beta_2\vec{n}$, zapisana u paru baza $(\vec{m},\vec{n})$, jednaka ako i samo ako vrijedi $\alpha_1=\alpha_2$ i $\beta_1=\beta_2$.

kriterij jednakosti vektora

Primjer 2. Odredimo realne parametre α i β da vektori $\vec{a}=(3\alpha-1)\vec{m}+4\vec{n}$ i $\vec{b}=2\vec{m}-(2\beta+3)\vec{n}$ budu jednaki.

Iz kriterija jednakosti vektora slijedi:

$$3\alpha-1=2 \text{ i } 4=-2\beta-3$$

pa je $\alpha=1$ i $\beta=-\frac{7}{2}$.

Kriterij kolinearnosti vektora

Dva su vektora $\vec{a}=\alpha_1\vec{m}+\beta_1\vec{n}$ i $\vec{b}=\alpha_2\vec{m}+\beta_2\vec{n}$, zapisana u paru baza $(\vec{m},\vec{n})$, kolinearna ako i samo ako vrijedi $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\beta_1}{\beta_2}$.

kriterij kolinearnosti vektora

Primjer 3. Odredi realni broj λ tako da vektori $\vec{p}=(\lambda+2)\vec{m}+\vec{n}$ i $\vec{q}=5\vec{m}+(\lambda-2)\vec{n}$ budu kolinearni.

Iz kriterija kolinearnosti slijedi:

$$\frac{\lambda+2}{5}=\frac{1}{\lambda-2}.$$

Sada je

$$\lambda^2-4=5,$$

odnosno

$$\lambda^2=9$$

pa je $\lambda=\pm 3$.

4.5. VEKTORI U PRAVOKUTNOM KOORDINATNOM SUSTAVU

Dva su istaknuta vektora u pravokutnom koordinatnom sustavu:

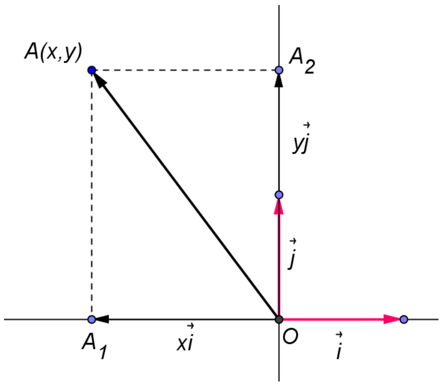
$\vec{i}$ … jedinični vektor u smjeru x osi,

$\vec{j}$ … jedinični vektor u smjeru y osi.

Vrijedi: $|\vec{i}|=1$, $|\vec{j}|=1$, $\vec{i}\perp\vec{j}$.

Par vektora $(\vec{i}, \vec{j})$ čini **bazu pravokutnog koordinatnog sustava** ili **kanonsku bazu**.

kanonska baza



Svaki se vektor u ravnini može rastaviti na komponente u smjeru vektora kanonske baze.

Neka je $A(x, y)$ po volji dana točka ravnine. Neka je A_1 ortogonalna projekcija točke A na x os i A_2 ortogonalna projekcija točke A na y os.

Vektori $\overrightarrow{OA_1}$ i $\vec{i}$ i vektori $\overrightarrow{OA_2}$ i $\vec{j}$ su kolinerani i vrijedi:

$$\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i} \text{ i } \overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}.$$

Zbrajanjem vektora po pravilu paralelograma dobivamo:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Radijvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ točke $A(x, y)$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Realne brojeve x i y nazivamo **koordinate vektora** $\overrightarrow{OA}$.

koordinate vektora

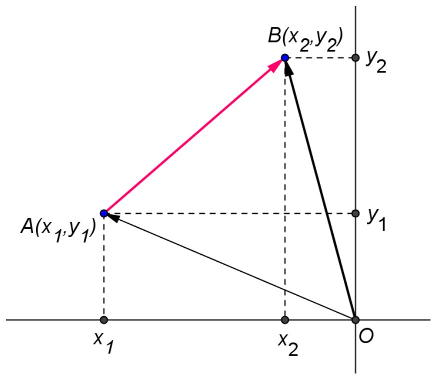
Sada se lako može pokazati općenitija formula:

Vektor $\overrightarrow{AB}$ s početkom u točki $A(x_1, y_1)$ i završetkom u točki $B(x_2, y_2)$ ima prikaz:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}.$$

prikaz vektora u kanonskoj bazi

Pogledajmo jednostavni izvod formule:



Vektor $\overrightarrow{AB}$ možemo napisati kao razliku radijvektora:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Prema prethodnom, možemo pisati:

$$\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} \text{ i } \overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

pa je

$$\overrightarrow{AB} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) =$$
$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}.$$

Uobičajeno je koordinate vektora $\vec{a}$ označavati s a_x i a_y, a vektora $\vec{b}$ s b_x i b_y, tj. $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$.

Izrazimo kriterij jednakosti vektora u navedenim oznakama:
Dva su vektora $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ i $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$, zapisana u paru baza $(\vec{i}, \vec{j})$, jednaka ako i samo ako vrijedi $a_x = b_x$ i $a_y = b_y$.

Prisjetimo se formule za udaljenost dviju točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Ta je udaljenost jednaka **duljini vektora** $\overrightarrow{AB}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

duljina vektora

Općenitije, duljina vektora $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ jednaka je:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2}}\ .$$

Primjer 1. Neka su $A(-3,1)$, $B(1,-2)$ i $C(5,7)$ vrhovi su trokuta. Odredimo vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CA}$ i njihove duljine.

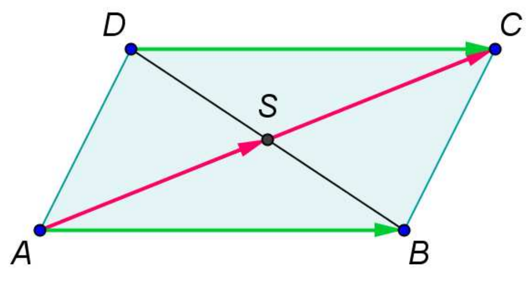
Primjenom navedenih formula dobivamo:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = (1+3)\vec{i} + (-2-1)\vec{j} = 4\vec{i} - 3\vec{j}\,,$$
$$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B)\vec{i} + (y_C - y_B)\vec{j} = (5-1)\vec{i} + (7+2)\vec{j} = 4\vec{i} + 9\vec{j}\,,$$
$$\overrightarrow{CA} = (x_A - x_C)\vec{i} + (y_A - y_C)\vec{j} = (-3-5)\vec{i} + (1-7)\vec{j} = -8\vec{i} - 6\vec{j}\,.$$

Izračunajmo još duljine ovih vektora:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5\,,$$
$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{4^2 + 9^2} = \sqrt{97}\,,$$
$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10\,.$$

Primjer 2. Ako su točke $A(-3,1)$ i $B(4,-1)$ dva vrha paralelograma $ABCD$, a točka $S(1,2)$ sjecište njihovih dijagonala. Odredimo koordinate vrhova C i D te duljinu vektora $\overrightarrow{BD}$.



Vektori $\overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{SC}$ su jednaki. Iz te činjenice odredit ćemo koordinate točke $C(x_C, y_C)$. Izjednačavanjem

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SC}$$

dobivamo:

$$(1+3)\vec{i} + (2-1)\vec{j} = (x_C - 1)\vec{i} + (y_C - 2)\vec{j}$$

iz čega slijedi:

$$x_C - 1 = 4 \text{ i } y_C - 2 = 1$$

pa smo odredili točku $C(5,3)$.
Koordinate točke D možemo odrediti na sličan način ili npr. iz jednakosti vektora $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Sada je:

$$(4+3)\vec{i}+(-1-1)\vec{j}=(5-x_D)\vec{i}+(3-y_D)\vec{j}$$

pa je

$$5-x_D=7 \text{ i } 3-y_D=-2,$$

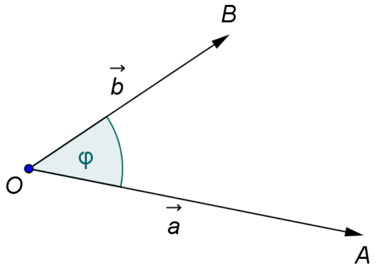
odnosno $D(-2,5)$.
Izračunajmo još duljinu vektora $\overrightarrow{BD}$:

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2}=\sqrt{(-2-4)^2+(5+1)^2}=\sqrt{(-6)^2+6^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}.$$

4.6. SKALARNI UMNOŽAK DVAJU VEKTORA

Ovdje upoznajemo još jednu računsku operaciju s vektorima: množenje vektora. Rezultat tog množenja bit će skalar. Zato se operacija naziva **skalarno množenje** vektora.

Neka su $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ i $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ vektori različiti od nulvektora.



Kut $\angle AOB$ nazivamo **kut između vektora** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i označavamo ga $\varphi=\angle(\vec{a},\vec{b})$. Mjera tog kuta je u intervalu $[0°,180°]$, tj. $[0,\pi]$.

kut između vektora

Skalarni umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je realni broj $\vec{a}\cdot\vec{b}$ definiran s:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,$$

gdje je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

skalarni umnožak vektora

Ako je neki (ili oba) vektor jednak nulvektoru , onda se pojam kuta između vektora na definira. Tada je skalarni umnožak po definiciji jednak nuli.

Predznak skalarnog umnoška ovisi o mjeri kuta između vektora. Ako je kut šiljast, umnožak je pozitivan (jer je kosinus šiljastog kuta pozitivan), ako je kut pravi, umnožak je jednak nuli (jer je kosinus pravog kuta jednak nuli), a ako je kut tupi, umnožak je negativan (jer je kosinus tupog kuta negativan).

Skalarni se umnožak može izračunati iz prikaza vektora u pravokutnom koordinatnom sustavu:

Skalarni umnožak vektora $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$ i $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}$ računamo po formuli:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y.$$

Iz definicije i svojstava računskih operacija s vektorima i skalarima proizlazi da pomoću skalarnog produkta možemo:

1. izračunati duljinu vektora: $\vec{a}\cdot\vec{a}$ označavamo $\vec{a}^{\,2}$ pa je $\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2$,
2. izračunati kut između vektora: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$,
3. ispitivati ili uvjetovati okomitost dvaju vektora: ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomiti, onda je $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, a ako je $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, onda je ili jedan od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nulvektor ili su ti vektori okomiti i pišemo $\vec{a}\perp\vec{b}$.

upotreba skalarnog umnoška vektora

Primjer 1. Ako je $\vec{m}=3\vec{a}-\vec{b}$ i $\vec{n}=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$ i $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=150°$.

Odredimo:

a) $\vec{m}\cdot\vec{n}$

$$\vec{m}\cdot\vec{n}=\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)=6\vec{a}^{\,2}+9\vec{a}\vec{b}-2\vec{a}\vec{b}-3\vec{b}^{\,2}=$$

$$=6\left|\vec{a}\right|^2+7\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)-3\left|\vec{b}\right|^2=6\cdot 2^2+7\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 150°-3\cdot\sqrt{3}^{\,2}=$$

$$=6\cdot 4+7\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-3\cdot\sqrt{3}^{\,2}=24-21-9=-6.$$

b) $\left|\vec{m}\right|$

$$\left|\vec{m}\right|^2=\vec{m}^{\,2}=\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)^2=9\vec{a}^{\,2}-6\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}=9\left|\vec{a}\right|^2-6\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left|\vec{b}\right|^2=$$

$$=9\cdot 2^2-6\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 150°+\sqrt{3}^{\,2}=36+18+3=57$$

Slijedi da je $\left|\vec{m}\right|=\sqrt{57}$.

c) $\vec{n_0}$

Najprije je:

$$\left|\vec{n}\right|^2=\vec{n}^{\,2}=\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)^2=4\vec{a}^{\,2}+24\vec{a}\vec{b}+9\vec{b}^{\,2}=4\left|\vec{a}\right|^2+12\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)+9\left|\vec{b}\right|^2=$$

$$=4\cdot 2^2+12\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 150°+9\cdot\sqrt{3}^{\,2}=16-36+27=7$$

pa je $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{7}$. Sada je:

$$\vec{n_0}=\frac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)=\frac{2}{\sqrt{7}}\vec{a}+\frac{3}{\sqrt{7}}\vec{b}.$$

Primjer 2. Dane su točke $A(-4,1)$, $B(1,-3)$, $C(3,2)$. Koristeći se skalarnim produktom vektora, odredi kut β trokuta ABC.

Kut β je kut između vektora $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$. Bitno je da je početak oba vektora u vrhu kuta koji računamo. Odredimo najprije prikaz vektora $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$ u kanonskoj bazi $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\overrightarrow{BA} = (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} = (-4-1)\vec{i} + (1+3)\vec{j} = -5\vec{i} + 4\vec{j},$$
$$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B)\vec{i} + (y_C - y_B)\vec{j} = (3-1)\vec{i} + (2+3)\vec{j} = 2\vec{i} + 5\vec{j}.$$

Skalarni umnožak vektora $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ jednak je:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = -5 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 10.$$

Izračunajmo još duljine ovih vektora:

$$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{41},$$
$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}.$$

Sada je:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{10}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{29}} =$$

pa je $\beta = 73°08'30''$.

Primjer 3. Odredimo realni parametar λ tako da vektori $\vec{a} = (2\lambda - 1)\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{b} = (\lambda + 3)\vec{i} + (1 - \lambda)\vec{j}$ budu okomiti.

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomiti, onda je njihov skalarni umnožak jednak nuli, tj. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Zato imamo:

$$(2\lambda - 1)(\lambda + 3) + 3(1 - \lambda) = 0.$$

Sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$2\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

čija su rješenja $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -1$, odnosno vektori $\vec{a_1} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{b_1} = 3\vec{i} + \vec{j}$ te vektori $\vec{a_2} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{b_2} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ su međusobno okomiti.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Točke A, B, C, D, E i F vrhovi su pravilnog šesterokuta, a točka S njegovo središte. Odredite vektore $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF}$ i $\overrightarrow{SF} - \overrightarrow{CS}$.
2. Dan je pravilni šesterokut $ABCDEF$ i neka je $\vec{e_1} = \overrightarrow{AS}$ i $\vec{e_2} = \overrightarrow{BS}$, gdje je S središte šesterokuta. Prikažite vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{AC}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$.
3. Izračunajte umnožak $(4\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b})$, ako je $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$?
4. Kolika je duljina vektora $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, ako je $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$?

5. Kolika je duljina dijagonale $\overline{AC}$ paralelograma $ABCD$ kojemu su točke $B(5,3)$, $C(0,8)$ i $D(-3,5)$ tri uzastopna vrha?

6. Ako su točke $A(-3,1)$ i $B(4,-1)$ dva vrha paralelograma $ABCD$, točka $S(1,2)$ sjecište njihovih dijagonala, odredite koordinate vrhova C i D.

7. Primjenom skalarnog produkta odredite najveći kut trokuta ABC ako su vrhovi trokuta točke $A(-1,2)$, $B(1,-1)$, $C(6,1)$.

8. Dane su točke $A(-5,1)$, $B(-1,4)$, $C(1,-4)$ i $D(2,3)$. Koristeći se skalarnim produktom vektora, odredite kut između pravaca AB i CD.

9. Odredite nepoznatu koordinatu vrha C trokuta ABC, $A(-2,1)$, $B(4,-2)$, $C(-1,y)$ tako da trokut bude pravokutan s pravim kutom pri vrhu A.

10. Odredite realni broj λ tako da vektori $\vec{a}=(\lambda+1)\vec{m}-(\lambda-1)\vec{n}$ i $\vec{b}=-\lambda\vec{m}+3\lambda\vec{n}$ budu kolinearni.

11. Odredite realni broj p tako da vektori $\vec{a}=\frac{1}{4}\vec{i}+2\vec{j}$ i $\vec{b}=-p\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}$ budu međusobno okomiti.

12. Dani su vektori $\vec{a}=-2\vec{i}-5\vec{j}$, $\vec{b}=4\vec{i}+\vec{j}$ i $\vec{c}=-2\vec{i}-5\vec{j}$. Odredite vektor $\vec{v}$ kolinearan s vektorom $\vec{c}$, a duljine jednake duljini vektora $\vec{a}+\vec{b}$.

13. Dani su vektori $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}$. Odredite vektor $\vec{c}$ za koji je $\vec{a}\cdot\vec{c}=3$ i $\vec{b}\cdot\vec{c}=-5$.

14. Odredite vektor $\vec{b}$ kolinearan s vektorom $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ i za koji je $\vec{a}\cdot\vec{b}=-26$.

15. Odredite vektor $\vec{b}$ okomit na vektor $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}$ i duljine $4\sqrt{5}$.

5. ANALITIČKA GEOMETRIJA RAVNINE

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. *Kako odrediti udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini? Kako izračunati površinu trokuta zadanog koordinatama vrhova*
2. *Kako odrediti polovište dužine i težište trokuta?*
3. *Kako dužinu podijeliti u zadanom omjeru?*

5.1. TOČKA U PRAVOKUTNOM KOORDINATNOM SUSTAVU

U ovoj cjelini nećemo definirati koordinatni sustav i nazive koji bi trebali biti poznati od ranije, nego ponoviti osnovna svojstva kojima ćemo se služiti u daljnjim razmatranjima.

Uređeni par realnih brojeva (x,y) određuje točno jednu točku T ravnine i obrnuto, točki T ravnine pridružen je točno jedan par uređenih brojeva (x,y).

koordinate točke

Realne brojeve x i y nazivamo **koordinate točke** T. Broj x je njezina prva koordinata ili **apscisa**, a broj y njezina druga koordinata ili **ordinata**.

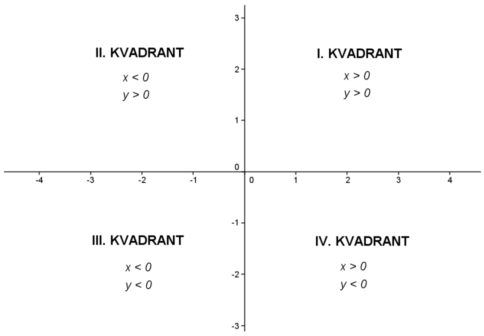
apscisa

ordinata

Svakoj točki T pridružen je i radijvektor $\overrightarrow{r_T} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Koordinatne osi dijele ravninu na četiri dijela koje nazivamo **kvadranti**. Kvadrante karakteriziraju predznaci koordinata njihovih točaka:

kvadranti



5.2. UDALJENOST DVIJU TOČAKA

Već smo ranije spomenuli i koristili formulu za udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ u koordinatnoj ravnini:

formula za udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Primjer 1. Ako su $A(5,-1)$ i $B(-3,5)$ dva vrha jednakostraničnog trokuta, izračunajmo njegov opseg.

Izračunajmo duljinu stranice danog jednakostraničnog trokuta:

$$a = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3-5)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{100} = 10$$

pa je $o = 3a = 30$ jedinica.

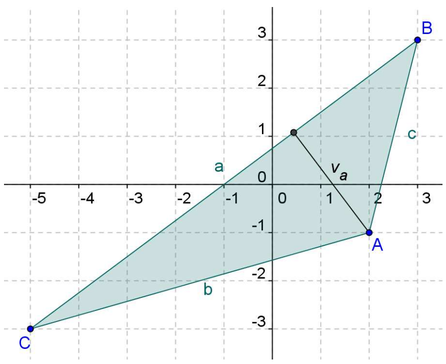
5.3. POVRŠINA TROKUTA ODREĐENOG KOORDINATAMA VRHOVA

Ako su $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ vrhovi trokuta ABC, onda njegovu površinu računamo po formuli:

formula za površinu trokuta zadanog koordinata-ma vrhova

$$P = \frac{1}{2}\left|y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)\right|.$$

Primjer 1. Koristeći formule za udaljenost točaka i površinu trokuta zadanog koordinatama vrhova, izračunajmo duljinu visine v_a trokuta ABC ako su $A(2,-1)$, $B(3,3)$ i $C(-5,-3)$ njegovi vrhovi.



Duljinu visine izračunat ćemo po formuli $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$. Odredimo zato najprije duljinu stranice $a = |BC|$ i površinu zadanog trokuta:

$$a = |BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} =$$
$$= \sqrt{(-5-3)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{100} = 10,$$

$$P = \frac{1}{2}|y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)| =$$
$$= \frac{1}{2}|-1\cdot(3+5) + 3\cdot(-5-2) - 3\cdot(2-3)| =$$
$$= \frac{1}{2}|-8-21+3| = \frac{1}{2}\cdot 26 = 13.$$

Sada je:

$$v_a = \frac{2P}{a} = \frac{2\cdot 13}{10} = \frac{13}{5}.$$

5.4. DIJELJENJE DUŽINE U ZADANOM OMJERU

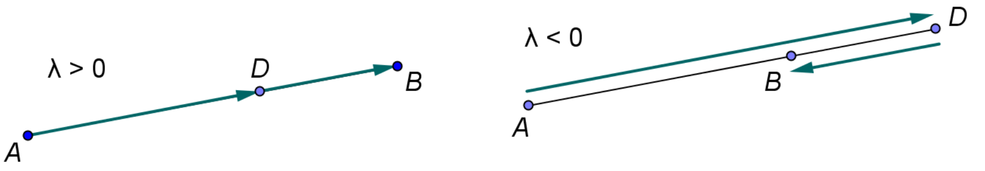
Neka je $\overline{AB}$ zadana dužina i D neka njezina točka. Kažemo da točka D dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru λ ako vrijedi $|AD|:|DB| = \lambda$.

Dijeljenje dužine u zadanom omjeru možemo jednostavno opisati korištenjem vektora. Naime, vektori $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{DB}$ su kolinearni ako za njihove duljine vrijedi:

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| : \left|\overrightarrow{DB}\right| = \lambda.$$

Kažemo da točka D dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $\lambda \in \mathbf{R}$ ako je $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{DB}$.

Točku D nazivamo **djelišna točka**



dijeljenje dužine u zadanom omjeru

Kažemo da točka D dijeli dužinu $\overline{AB}$ iznutra ako je $\lambda > 0$ ($\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{DB}$ su iste orijentacije) odnosno izvana ako je $\lambda < 0$ ($\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{DB}$ su suprotne orijentacije).

djelišna točka

koordinate djelišne točke

Neka je $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $D(x_D, y_D)$. Djelišna točka D koja dužinu $\overline{AB}$ dijeli u omjeru λ ima koordinate:

$$x_D = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_D = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Primjer 1. Ako je $A(-4,-3)$ i $B(4,1)$, odredimo koordinate točke D koja dužinu $\overline{AB}$ dijeli u omjeru $1:3$:

a) iznutra

Primjenom formula za koordinate djelišne točke i $\lambda = \frac{1}{3}$ dobivamo:

$$x_D = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-4 + \frac{1}{3}\cdot 4}{1+\frac{1}{3}} = -2 \text{ i } y_D = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{-3 + \frac{1}{3}\cdot 1}{1+\frac{1}{3}} = -2,$$

odnosno $D_1(-2,-2)$.

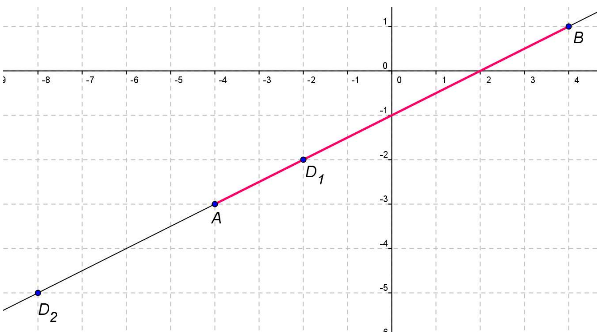
b) izvana

Primjenom formula za koordinate djelišne točke i $\lambda = -\frac{1}{3}$ dobivamo:

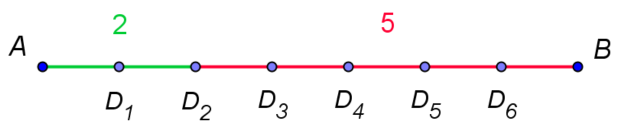
$$x_D = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-4 - \frac{1}{3}\cdot 4}{1-\frac{1}{3}} = -8 \text{ i } y_D = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{-3 - \frac{1}{3}\cdot 1}{1-\frac{1}{3}} = -5,$$

odnosno $D_2(-8,-5)$.

Prikažimo rezultat u koordinatnoj ravnini:



Primjer 2. Dužina $\overline{AB}$ podijeljena je na sedam jednakih dijelova. Odredimo koordinate druge djelišne točke ako je $A(-9,3)$ i $B(5,-4)$.



Druga djelišna točka D_2 dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $\lambda = \frac{|\overrightarrow{AD_2}|}{|\overrightarrow{D_2B}|} = \frac{2}{5}$.

Sada je:

$$x_{D_2} = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{-9 + \frac{2}{5}\cdot 5}{1+\frac{2}{5}} = -5 \text{ i } y_{D_2} = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{3 + \frac{2}{5}\cdot(-4)}{1+\frac{2}{5}} = 1,$$

odnosno $D_2(-5,1)$.

Koordinate polovišta dužine

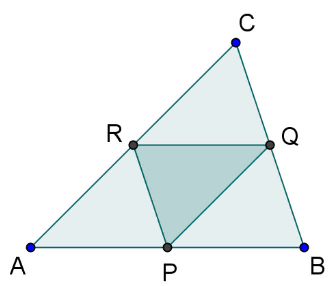
Polovište P **dužine** $\overline{AB}$ je točka koja dužinu dijeli na dva jednaka dijela.
Iz $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{PB}\right|$ slijedi da je $\lambda = 1$. Uvrštavanjem $\lambda = 1$ u formule za koordinate djelišne točke dobivamo formule za koordinate polovišta.

Neka je $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $P(x_P, y_P)$. Polovište P dužine $\overline{AB}$ ima koordinate:

$$x_P = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_P = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

koordinate polovišta dužine

Primjer 3. $A(-7,-2)$ i $C(5,2)$ su vrhovi trokuta, a $P(-3,3)$ je polovište stranice $\overline{AB}$. Odredimo koordinate polovišta R dužine $\overline{AC}$, koordinate vrha B, a potom i koordinate polovišta Q stranice $\overline{BC}$. Kako se odnose površine trokuta ABC i PQR?



Uvrštavanjem zadanih koordinata u formule za koordinate polovišta dužine najprije dobivamo:

$$x_R = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-7+5}{2} = -1 \text{ i}$$

$$y_R = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0,$$

odnosno $R(-1,0)$.
Budući da je $P(-3,3)$ polovište stranice $\overline{AB}$ imamo:

$$-3 = \frac{-7 + x_B}{2} \text{ pa je } x_B = 1 \text{ i}$$

$$3 = \frac{-2 + y_B}{2} \text{ pa je } y_B = 8,$$

odnosno $B(1,8)$.
Sada je:

$$x_Q = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ i}$$

$$y_Q = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{8+2}{2} = 5,$$

odnosno $Q(3,5)$.
Iz poučaka o sukladnosti i sličnosti slijedi $P_{ABC} : P_{PQR} = 4:1$. Dokažite to i računski, tj. primjenom formule za površinu trokuta zadanog koordinatama vrhova.

Koordinate težišta trokuta

Ponovimo: **težište** trokuta je sjecište težišnica. **Težišnica** je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice. Težište dijeli težišnicu u omjeru

$2:1$ iznutra od vrha prema stranici. Lako se pokažu formule za koordinate težišta trokuta.

Težište T trokuta ABC s vrhovima $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ ima koordinate:

$$x_T = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_T = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

koordinate težišta trokuta

Primjer 5. Odredimo koordinate C vrha trokuta ABC ako su koordinate vrhova $A(-7,-3)$ i $B(3,1)$, a $T(1,-2)$.

Uvrštavanjem u formule za koordinate težišta trokuta dobivamo:

$$1 = \frac{-7+3+x_C}{3} \text{ pa je } x_C = 7 \text{ i}$$

$$-2 = \frac{-3+1+y_C}{3} \text{ pa je } y_C = -4.$$

Tražene koordinate su $C(7,-4)$.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Točkama B i C dužina $\overline{AD}$ podijeljena je na tri jednaka dijela. Odredite koordinate točaka C i D ako je $A(-3,2)$ i $B(0,1)$.
2. Dužina $\overline{MN}$, $M(1,5)$ i $N(7,3)$, promjer je kružnice. U kojoj je točki središte kružnice? Kolika je duljina polumjera kružnice?
3. Kolike su duljine srednjica i težišnica trokuta ABC ako su vrhovi trokuta $A(-3,1)$, $B(3,-5)$ i $C(5,7)$?
4. Točke $A(-2,-3)$, $B(x,3)$ i $C(2,9)$ pripadaju jednom pravcu. Odredite nepoznatu koordinatu točke B.
5. Površina trokuta ABC je 4. Dva su njegova vrha u točkama $A(2,1)$ i $B(3,-2)$. Odredite koordinate vrha C ako vrh C:
   a) leži na osi x, b) leži na osi y.
6. Izračunajte površinu četverokuta $ABCD$ ako su zadani njegovi vrhovi $A(-4,0)$, $B(-1,-3)$, $C(3,-2)$ i $D(2,5)$.
7. Izračunajte duljinu visine na stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC ako su vrhovi trokuta $A(-3,2)$, $B(1,-1)$ i $C(-3,-3)$.
8. Izračunajte površinu trokuta PQR gdje su P, Q i R redom plovišta dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC ako su zadani vrhovi $A(-2,-2)$ i $C(7,3)$ te polovište $P(2,-1)$ stranice $\overline{AB}$.

6. PRAVAC

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:
1. *Kako zadajemo pravac? Koji su oblici jednadžbe pravca?*
2. *U kojem međusobnom položaju mogu biti pravci u ravnini?*
3. *Koji je uvjet okomitosti, a koji uvjet paralelnosti dvaju pravaca?*
4. *Kako računamo kut dvaju pravaca? Kako određujemo jednadžbu simetrale kuta dvaju pravaca?*

6.1. EKSPLICITNI OBLIK JEDNADŽBE PRAVCA

Osnovni zadaci analitičke geometrije pravca su: provjeriti pripada li zadana točka zadanom pravcu, odrediti neku točku pravca, nacrtati pravac u koordinatnoj ravnini, analitički ispitati međusobni položaj dvaju pravaca ili uz određene uvjete odrediti jednadžbu pravca. Ovdje ćemo proučiti tri različita oblika jednadžbe pravca:
1. eksplicitni oblik jednadžbe pravca,
2. implicitni oblik jednadžbe pravca,
3. segmentni oblik jednadžbe pravca,

te različite načine zadavanja pravca:
1. pravac određen koeficijentom smjera i jednom točkom,
2. pravac određen dvjema točkama.

O pravcu i njegovoj jednadžbi bilo je riječi u prethodnim razredima. Pravac smo proučavali kao graf linearne funkcije.

Funkcija oblika $f(x)=kx+l$, gdje su k i l realni brojevi i $k\neq 0$ naziva se **polinom prvog stupnja** ili **linearna funkcija**.

Linearna funkcija dobila je ime po tome što je njezin graf pravac (od lat. *linea*).

Graf linearne funkcije $f(x)=kx+l$ je pravac jednadžbe $y=kx+l$.

eksplicitni oblik jednadžbe pravca

Jednadžbu pravca oblika

$$y=kx+l$$

nazivamo **eksplicitni oblik jednadžbe pravca**. Koeficijent k nazivamo **koeficijent smjera** ili **nagib pravca**, a koeficijent l **odsječak na y-osi** ili **pomak po y-osi**.

koeficijent smjera

odsječak na y osi

Primjer 1. U istom koordinatnom sustavu nacrtaj pravce:

a) $y=2x$,
b) $y=-3x$,
c) $y=2x-1$,
d) $y=-3x+4$.

Odredimo nekoliko točaka zadanih pravaca:

a)

x	0	1	2
$y=2x$	0	2	4

b)

x	0	1	-1
$y=-3x$	0	-3	3

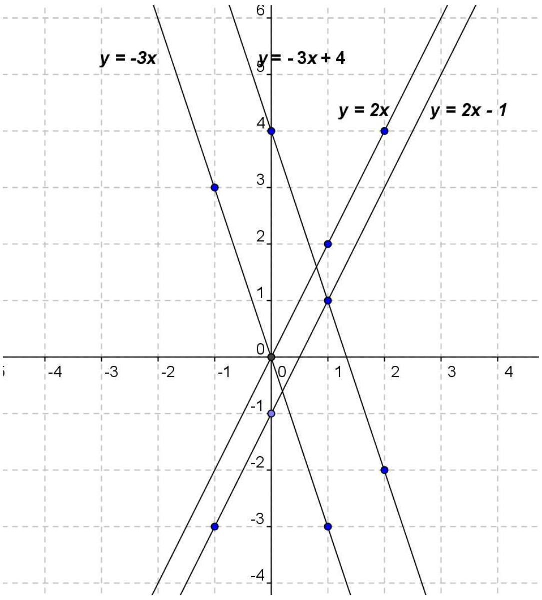
c)

x	0	1	-1
$y=2x-1$	-1	1	-3

d)

x	0	1	2
$y=-3x+4$	4	1	-2

Predočimo točke u koordinatnom sustavu i nacrtajmo pravce:



Promotrimo li sliku vidimo da pravci $y=2x$ i $y=2x-3$ rastu (kada raste vrijednost x, raste i vrijednost funkcije y), a pravci $y=-3x$ i $y=-3x+4$ padaju (kada raste vrijednost x, vrijednost funkcije y pada).
O rastu i pada pravca govori koeficijent smjera (nagib pravca) odakle i njegovo ime:

Pravac $y=kx+l$ raste ako je $k>0$, a pada ako je $k<0$.

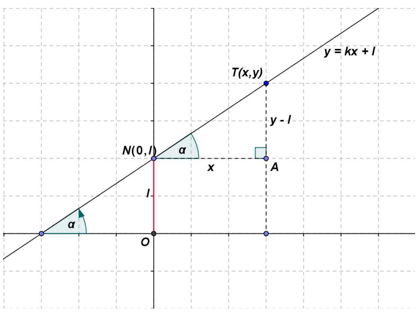
rast i pad pravca

Pogledajmo dalje u kojim točkama zadani pravci sijeku y-os. Pravci $y=2x$ i $y=-3x$ prolaze ishodištem koordinatnog sustava, tj. sijeku y-os u točki $(0{,}0)$, pravac $y=2x-1$ u točki $(0,-1)$, a pravac $y=-3x+4$ u točki $(0{,}4)$. Pročitajmo njihove odsječke na y-osi. Oni su redom 0, 0, -1 i 4.

Zaključujemo:

Pravac $y=kx+l$ siječe y-os u točki $(0,l)$.
Pravac $y=kx$ prolazi ishodištem koordinatnog sustava.

Prikloni kut pravca



Kut (mjere α) koji pravac zatvara s pozitivnim dijelom x osi nazivamo **prikloni kut**. Kažemo i da je to kut za koji treba u pozitivnom smjeru zarotirati pozitivni dio x osi oko sjecišta pravca p i x osi do pravca p.

prikloni kut pravca

Primjenom trigonometrije dobivamo:

$$tg\alpha = \frac{y-l}{x}$$

iz čega je

$$y = tg\alpha \cdot x + l\,.$$

Usporedbom dobivene jednadžbe s eksplicitnim oblikom jednadžbe pravca dobivamo:

$$k = tg\alpha\,.$$

Primjer 2. Ako je zadan pravac jednadžbom $y = -\frac{2}{3}x + 5$, odredimo:

a) koeficijent smjera: $k = -\frac{2}{3}$,

b) odsječak na y osi: $l = 5$,

c) prikloni kut: $tg\alpha = k = -\frac{2}{3}$ pa je $\alpha = 146°18'36''$.

6.2. IMPLICITNI OBLIK JEDNADŽBE PRAVCA

Činjenica da eksplicitnim oblikom jednadžbe pravca nisu obuhvaćeni pravci u specijalnom položaju, tj. pravci paralelni s koordinatnim osima dovodi nas do jednog drugog oblika jednadžbe pravca. Zapišimo promatrane jednadžbe u obliku u kojemu je na jednoj strani 0: $kx - y + l = 0$, $y - l = 0$, $x - c = 0$.

Općenito svaka od tih jednadžbi može se zapisati u obliku

$$Ax + By + C = 0,\ A \neq 0 \text{ ili } B \neq 0,$$

koji nazivamo **implicitni** ili **opći oblik jednadžbe pravca**.

implicitni oblik jednadžbe pravca

Ako je $B \neq 0$ jednadžba se može zapisati u obliku:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}\,.$$

Usporedbom s eksplicitnim oblikom jednadžbe pravca dobivamo:

$$k = -\frac{A}{B},\ l = -\frac{C}{B}\,.$$

Primjer 1. Provjerimo koja od točaka $A(3,-1)$, $B(2,3)$ pripadaju pravcu $3x + 2y - 7 = 0$.

Ako točka pripada pravcu, onda njezine koordinate moraju ispunjavati jednadžbu pravca.

Uvrstimo koordinate točke $A(3,-1)$ u jednadžbu pravca. Iz

$$3\cdot 3+2\cdot(-1)-7=0$$

slijedi $0=0$ pa zaključujemo da točka A pripada zadanom pravcu.
Ponovimo postupak za točku $B(2,3)$. Dobivamo:

$$3\cdot 2+2\cdot 3-7=0,$$

odnosno $5=0$ što ne vrijedi pa točka B ne pripada pravcu.

Primjer 2. Odredimo nepoznatu koordinatu točke $A(2, y_A)$ ako ona pripada pravcu $4x-3y+13=0$.

Iz $4\cdot 2-3\cdot y_A+13=0$ dobivamo $y_A=7$ pa je $A(2,7)$.

Primjer 3. Odredimo točke u kojima pravac $3x-4y-6=0$ siječe koordinatne osi.

Točka na x osi ima ordinatu 0, tj. $y=0$ pa dobivamo: $3x-4\cdot 0-6=0$ iz čega je $x=2$ pa je sjecište pravca s x osi točka $M(2,0)$.
Točka na y osi ima apscisu 0, tj. $x=0$ pa dobivamo: $3\cdot 0-4y-6=0$ iz čega je $y=-\frac{3}{2}$ pa je sjecište pravca s y osi točka $N\left(0,-\frac{3}{2}\right)$.

Primjer 4. Odredimo realni parametar λ tako da pravac $(2\lambda-1)x+(2\lambda+3)y+\lambda-1=0$:

a) ima koeficijent smjera $\frac{2}{3}$

Iz $k=-\frac{A}{B}=-\frac{2\lambda-1}{2\lambda+3}=\frac{2}{3}$ slijedi $-6\lambda+3=4\lambda+6$ pa je $\lambda=-\frac{3}{10}$.

b) ima odsječak na y osi 2

Iz $l=-\frac{C}{B}=-\frac{\lambda-1}{2\lambda+3}=2$ slijedi $-\lambda+1=4\lambda+6$ pa je $\lambda=-1$.

c) bude okomit na x os

Pravac je okomit na x os ako je $B=0$. Iz $2\lambda+3=0$ dobivamo $\lambda=-\frac{3}{2}$.

d) bude okomit na y os

Pravac je okomit na y os ako je $A=0$. Iz $2\lambda-1=0$ dobivamo $\lambda=\frac{1}{2}$.

6.3. MEĐUSOBNI POLOŽAJ DVAJU PRAVACA

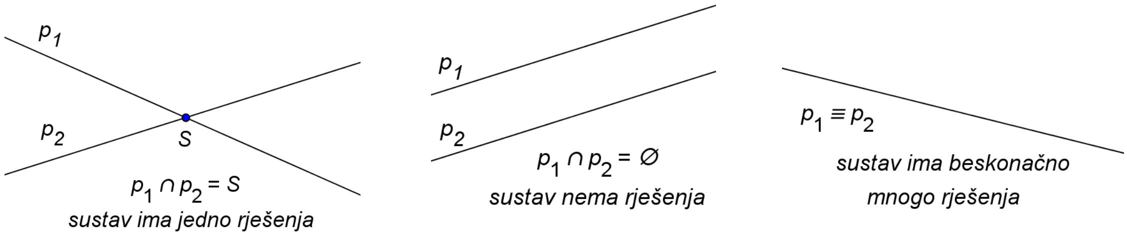
međusobni položaj dvaju pravaca u ravnini

Dva pravca u ravnini:

- imaju jednu zajedničku točku: (kažemo da se sijeku u jednoj točki $p_1 \cap p_2 = \{S\}$),
- nemaju zajedničkih točaka: (kažemo da su paralelni, $p_1 \parallel p_2$, $p_1 \cap p_2 = \emptyset$),
- imaju sve točke zajedničke (kažemo da se podudaraju $p_1 \equiv p_2$).

Međusobni položaj dvaju pravaca određujemo:

- grafičkom metodom (crtamo pravce u koordinatnom sustavu i nalazimo broj njihovih zajedničkih točaka),
- algebarskom ili računskom metodom (rješavamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice koji čine jednadžbe zadanih pravaca $\begin{cases} p_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ p_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$, a broj rješenja sustava odgovara broju njihovih zajedničkih točaka).



6.3.1. PRESJEČNA TOČKA DVAJU PRAVACA

presječna točka dvaju pravaca

Želimo li odrediti presječnu točku dvaju pravaca, tražimo uređeni par (x, y) koji zadovoljava jednadžbe obaju pravaca. Odredit ćemo ju tako da riješimo sustav koji određuju jednadžbe tih pravaca $\begin{cases} p_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ p_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$.

Primjer 1. Odredimo točku u kojoj se sijeku pravci $3x + 2y + 2 = 0$ i $2x - 3y + 10 = 0$.

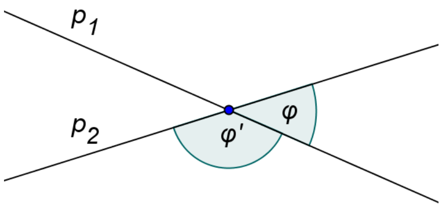
Rješavamo sustav $\begin{cases} 3x + 2y + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 10 = 0 \end{cases}$ po volji odabranom metodom. Neka je to npr. metoda suprotnih koeficijenata. Množenjem prve jednadžbe s 2, a druge s 3 dobivamo:

$$\begin{cases} 9x + 6y + 6 = 0 \\ 4x - 6y + 20 = 0 \end{cases}$$

Zbrajanjem jednadžbi dobivamo $13x + 26 = 0$ pa je . Dalje, dobivamo $y = 2$. Pravci se sijeku u točki $S(-2,2)$.

6.3.2. KUT DVAJU PRAVACA

Dva pravca p_1 i p_2 koji se sijeku određuju dva suplementarna neorijentirana kuta, označimo ih (odnosno njihove mjere) s φ i φ'. Dakle, vrijedi $\varphi + \varphi' = 180°$.

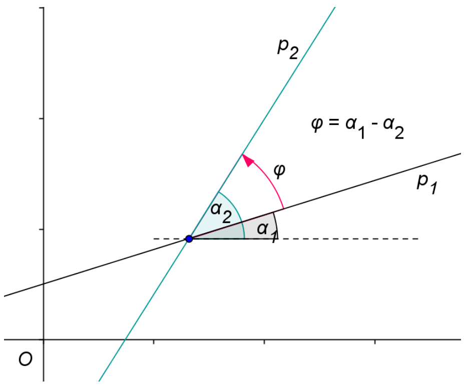


Kut između pravaca definiramo kao *manji* (manje mjere) od tih dvaju kutova, neka je to kut φ. Dakle, uvijek je $0° < \varphi \le 90°$. Za kut između paralelnih pravaca kažemo da ima mjeru $\varphi = 0°$.

kut između pravaca

Odredimo kut između pravaca zadanih eksplicitnim jednadžbama:

$$p_1 \ldots y = k_1 x + l_1,$$
$$p_2 \ldots y = k_2 x + l_2.$$



Označimo s α_1 i α_2 kutove koje ti pravci zatvaraju s pozitivnim dijelom x osi. Onda je $tg\alpha_1 = k_1$ i $tg\alpha_2 = k_2$. Neka je φ kut između zadanih pravaca, tj. kut za koji moramo zarotirati pravac p_1 da bi se poklopio s pravcom p_2. Vrijedi $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$ pa taj kut računamo po formuli:

$$tg\varphi = tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Budući da smo kut dvaju pravaca definirali kao manji od dva kuta koje ti pravci zatvaraju, formulu za računanje kuta φ između pravaca $p_1 \ldots y = k_1 x + l_1$ i $p_2 \ldots y = k_2 x + l_2$ zapisujemo u obliku:

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

formula za računanje kuta između pravaca

Primjer 1. Odredimo kut između pravca $4x + 8y - 1 = 0$ i $9x - 3y + 2 = 0$.

Koeficijenti zadanih pravaca su $k_1 = -\frac{1}{2}$ i $k_2 = 3$ pa je:

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right| = \left| \frac{3 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot 3} \right| = |-7| = 7$$

iz čega dobivamo $\varphi = 81°52'12''$.

6.3.3. PARALELNOST I OKOMITOST PRAVACA

Dva će pravca biti paralalena ako je kut između njih $\varphi = 0°$. Tada je $tg\varphi = 0$ pa iz

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0$$

vidimo da mora biti $k_2 = k_1$.

Dakle, dva su pravca zadana svojim jednadžbama u eksplicitnom ili implicitnom obliku:

$$p_1 \quad \ldots \quad y = k_1 x + l_1 \quad \ldots \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$p_2 \quad \ldots \quad y = k_2 x + l_2 \quad \ldots \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

paralelna, pišemo $p_1 \parallel p_2$, ako i samo ako imaju jednake koeficijente smjera, tj. vrijedi:

$$k_2 = k_1,$$

odnosno

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}, \text{ tj. } A_1 B_2 = A_2 B_1.$$

kriterij paralelnost pravaca

Dva su pravca okomita ako je kut između njih $\varphi = 90°$ pa je je $tg\varphi = \pm\infty$. To znači da nazivnik izraza $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$ mora biti jednak nuli:

$$1 + k_1 k_2 = 0 \text{ iz čega slijedi } k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Dakle, dva su pravca zadana svojim jednadžbama u eksplicitnom ili implicitnom obliku:

$$p_1 \quad \ldots \quad y = k_1 x + l_1 \quad \ldots \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$p_2 \quad \ldots \quad y = k_2 x + l_2 \quad \ldots \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

okomita, pišemo $p_1 \perp p_2$, ako i samo ako imaju suprotne i recipročke koeficijente smjera, tj. vrijedi:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1},$$

odnosno

$$\frac{A_2}{B_2} = -\frac{B_1}{A_1}, \text{ tj. } A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

kriterij okomitosti pravaca

Primjer 2. Odredimo parametar m tako da pravci $p_1 \ldots (\lambda + 1)x + (2\lambda - 1)y + \lambda = 0$ i $p_2 \ldots 6x - 4y + 1 = 0$ budu:

a) paralelni

Pravci su paralelni ako i samo ako imaju jednake koeficijente smjera.

Koeficijenti smjera zadanih pravaca su $k_1 = -\frac{\lambda+1}{2\lambda-1}$ i $k_2 = \frac{3}{2}$, pa po uvjetu paralelnosti mora biti:

$$-\frac{\lambda+1}{2\lambda-1} = \frac{3}{2}$$

iz čega je $\lambda = \frac{1}{8}$.

b) okomiti
Pravci su okomiti ako i samo ako imaju suprotne i recipročne koeficijente smjera, tj. mora vrijediti:

$$-\frac{\lambda+1}{2\lambda-1} = -\frac{2}{3}$$

iz čega je $\lambda = 5$.

6.4. NAČINI ZADAVANJA PRAVCA

Ranije smo spomenuli čime je pravac jednoznačno određen:

1. pravac je određen koeficijentom smjera i jednom točkom,
2. pravac je određen dvjema točkama.

Ovdje ćemo proučiti navedena dva načina zadavanja pravca.

6.4.1. PRAVAC ODREĐEN KOEFICIJENTOM SMJERA I JEDNOM TOČKOM

Zanima nas kako glasi jednadžba pravca koji prolazi točkom $T(x_1, y_1)$ i ima zadani koeficijent smjera k. Napišimo eksplicitni oblik jednadžbe tog pravca:

$$y = kx + l .$$

Točka T pripada pravcu pa njezine koordinate ispunjavaju jednadžbu pravca, tj. vrijedi:

$$y_1 = kx_1 + l .$$

Oduzimanjem ovih jednadžbi dobivamo:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Dakle, jednadžba pravca koji prolazi točkom $T(x_1, y_1)$ i ima zadani koeficijent smjera k glasi:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

pravac zadan koeficijentom smjera i jednom točkom

Primjer 1. Napišimo jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T(-5,-2)$, a s pozitivnim dijelom x osi zatvara kut $\alpha = 135°$.

Budući da je $k = tg\alpha = tg135° = -1$, uvrštavanjem u jednadžbu $y - y_1 = k(x - x_1)$ dobivamo:

$$y + 2 = -1 \cdot (x + 5),$$

odnosno jednadžba pravca u npr. eksplicitnom obliku glasi $y = -x - 7$.

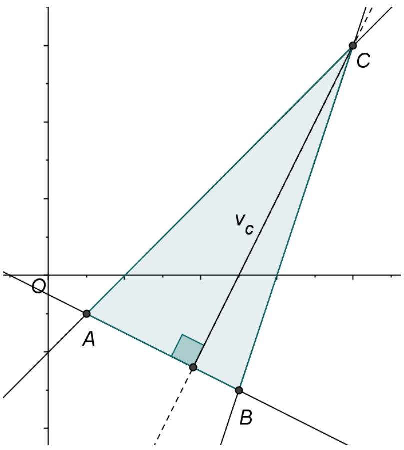
Primjer 2. Odredimo jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T(2,-1)$ i paralelan je s pravcem $4x + 10y - 7 = 0$.

Iz uvjeta paralelnosti pravaca slijedi da traženi pravac ima koeficijent smjera jednak zadanom pravcu, tj. $k = -\frac{2}{5}$. Dobivamo:

$$y + 1 = -\frac{2}{5} \cdot (x - 2)$$

pa je jednadžba traženog pravca u npr. implicitnom obliku: $2x + 5y - 1 = 0$.

Primjer 3. Stranice trokuta leže na pravcima $AB \ldots x + 2y + 1 = 0$, $BC \ldots 3x - y - 18 = 0$ i $AC \ldots x - y - 2 = 0$. Odredimo jednadžbu pravca na kojemu leži visina povučena iz vrha C.



Traženi pravac prolazi točkom C i okomit je na pravac AB. Odredimo najprije koordinate točke C. Točka C presječna je točka pravaca AC i BC pa ju nalazimo kao rješenje sustava:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 3x - y - 18 = 0 \end{cases}.$$

Dobivamo $C(8,6)$.

Budući da je pravac na kojemu leži visina povučena iz vrha C okomit na pravac AB slijedi da je njegov koeficijent suprotan i recipročan koeficijentu smjera $k_{AB} = -\frac{1}{2}$, tj. $k = 2$.

Sada je

$$y - 6 = 2 \cdot (x - 8)$$

pa je jednadžba traženog pravca $2x - y - 10 = 0$.

6.4.2. PRAVAC ODREĐEN DVJEMA TOČKAMA

Jednadžbu pravca kroz dvije točke možemo lagano izvesti na dva načina:

1. način:

Koristimo uvjet da točka $T_2(x_2, y_2)$ leži na pravcu koji prolazi točkom $T_1(x_1, y_1)$ i ima koeficijent smjera k:

$$y_2 - y_1 = k \cdot (x_2 - x_1)$$

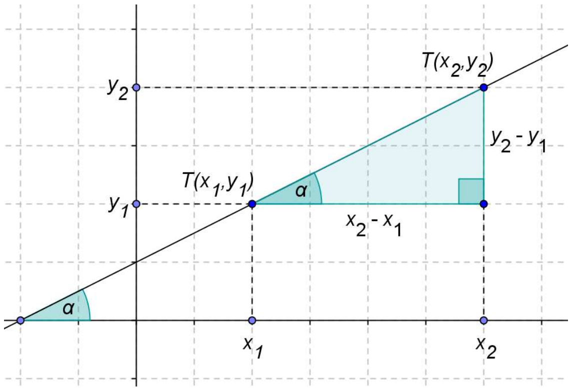
iz čega slijedi:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Jednadžba pravca kroz dvije točke $T_1(x_1,y_1)$ i $T_2(x_2,y_2)$ glasi:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1).$$

pravac zadan s dvije točke



2. način:
Preko geometrijskog značenja koeficijenta smjera k. Koeficijent smjera jednak je tangensu kuta kojeg pravac zatvara s pozitivnim dijelom x osi:

$$k=tg\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

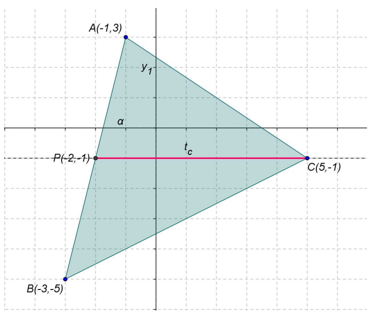
Primjer 1. Napišimo jednadžbu pravca koji prolazi točkama $T_1(-4,3)$ i $T_2(6,-5)$.

Uvrstimo koordinate zadanih točaka u formulu za jednadžbu pravca kroz dvije točke:

$$y-3=\frac{-5-3}{6-(-4)}\cdot(x-(-4)).$$

Sređivanjem dobivamo jednadžbu traženog pravca $y=-\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}$.

Primjer 2. Točke $A(-1,3)$, $B(-3,-5)$ i $C(5,-1)$ vrhovi su trokuta. Odredi jednadžbu pravca na kojemu leži težišnica t_c.



Težišnica t_c je dužina koja spaja vrh C s polovištem stranice $\overline{AB}$. Odredimo najprije koordinate polovišta P:

$$x_P=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-1+(-3)}{2}=-2,$$

$$y_P=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{3+(-5)}{2}=-1$$

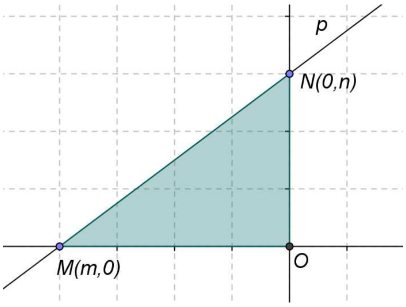
pa je $P(-2,-1)$. Uvrštavanjem dobivamo:

$$y-(-1)=\frac{-1-(-1)}{5-(-2)}\cdot(x-(-2)),$$

odnosno $t_c \ldots y=-1$.

6.5. SEGMENTNI OBLIK JEDNADŽBE PRAVCA

Neka pravac siječe koordinatne osi u točkama $M(m,0)$ i $N(0,n)$, gdje su m i n realni brojevi različiti od nule. Odredimo jednadžbu pravca određenog tim točkama.



To je pravac određen točkama $M(m,0)$ i $N(0,n)$ pa je njegova jednadžba:

$$y-0=\frac{n-0}{0-m}\cdot(x-m),$$

koju možemo zapisati u obliku:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1,$$

koji nazivamo **segmentni oblik jednadžbe pravca**.

segmentni oblik jednadžbe pravca

Brojeve m i n nazivamo **segmenti** ili koje pravac odsijeca **na x odnosno y osi** (odsječci na koordinatnim osima).

Uočimo na slici pravokutan trokut MON određen pravcem i koordinatnim osima. Njegovu je površinu jednostavno izračunati pomoću odsječaka m i n, jer su $|m|$ i $|n|$ duljine njegovih katete pa je:

$$P=\frac{|m|\cdot|n|}{2}.$$

Primjer 1. Odredimo odsječke koje pravac $10x-6y-15=0$ odsijeca na koordinatnim osima te površinu trokuta koji pravac zatvara s koordinatnim osima.

Zapišimo zadani pravac u segmentnom obliku.
Iz

$$10x-6y=15$$

dijeljenjem s 15 dobivamo:

$$\frac{10x}{15}-\frac{6y}{15}=1,$$

odnosno

$$\frac{2x}{3}-\frac{2y}{5}=1$$

i napokon:

$$\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{-\frac{5}{2}}=1.$$

Iz dobivenog segmentnog oblika čitamo odsječke na koordinatnim osima:

$m = \frac{3}{2}$ i $n = -\frac{5}{2}$ pa je tražena površina:

$$P = \frac{|m| \cdot |n|}{2} = \frac{\left|\frac{3}{2}\right| \cdot \left|-\frac{5}{2}\right|}{2} = \frac{\left|-\frac{15}{4}\right|}{2} = \frac{15}{8}.$$

Uočimo da smo odsječke na koordinatnim osima mogli odrediti i tako da odredimo točke u kojima pravac siječe koordinatne osi (*Primjer 3.* u točki 6.2).

Primjer 2. U jednadžbi pravca $-5x + 2ay + 10a = 0$ odredi realni parametar a tako da je površina trokuta koji zadani pravac zatvara s koordinatnim osima jednaka 20.

Zapišimo najprije zadani pravac u segmentnom obliku.

Iz

$$-5x + 2ay = -10a$$

dijeljenjem s $-10a$ dobivamo:

$$\frac{-5x}{-10a} + \frac{2ay}{-10a} = 1,$$

odnosno

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-5a} = 1.$$

Iz dobivenog segmentnog oblika čitamo odsječke na koordinatnim osima: $m = 2$ i $n = -5a$. Iz formule za površinu trokuta dobivamo:

$$\frac{|2| \cdot |-5a|}{2} = 20,$$

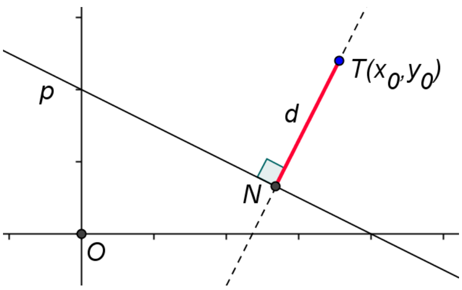
odnosno

$$|10a| = 40.$$

Rješenja ove jednadžbe su $a_1 = 4$ i $a_2 = -4$.

6.6. UDALJENOST TOČKE OD PRAVCA

Udaljenost točke T od pravca p je, po definiciji, najkraća od svih udaljenosti točke T i neke točke pravca p.



Neka je N nožište okomice iz točke T na pravac p.
Udaljenost točke T od pravca p jednaka je udaljenosti d točaka T i N.

Udaljenost točke $T(x_0.y_0)$ od pravca $p\ldots Ax+By+C=0$ računamo po formuli:

$$d(T,p)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

formula za udaljenost točke od pravca

Primjer 1. Izračunajmo udaljenost točke $T(-2,3)$ od pravca $2x-3y-13=0$.

Koristeći formulu dobivamo:

$$d(T,p)=\frac{|2\cdot(-2)-3\cdot3-13|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|-26|}{\sqrt{13}}=\frac{26}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}.$$

Primjer 2. Izračunajmo površinu pravokutnika kojemu dvije stranice leže na pravcima $p_1\ldots x-3y-7=0$ i $p_2\ldots 3x+y+9=0$, a točka $A(-1,4)$ jedan njegov vrh.

Koordinate točke A ne ispunjavaju jednadžbe pravaca p_1 i p_2 pa ona ne pripada ni jednom od njih. Budući da su koeficijenti smjera zadanih pravaca su $k_1=\frac{1}{3}$ i $k_2=-3$, oni su okomiti. Zbog navedenog je duljina jedne stranice pravokutnika jednaka udaljenosti točke A od pravca p_1, a duljina druge stranice jednaka je udaljenosti točke A od pravca p_2.
Imamo redom:

$$a=d(A,p_1)=\frac{|-1-3\cdot4-7|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|-20|}{\sqrt{10}}=\frac{20}{\sqrt{10}} \text{ i}$$

$$b=d(A,p_2)=\frac{|3\cdot(-1)+4+9|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|10|}{\sqrt{10}}=\frac{10}{\sqrt{10}}.$$

Sada je $P=a\cdot b=\frac{20}{\sqrt{10}}\cdot\frac{10}{\sqrt{10}}=\frac{200}{10}=20$.

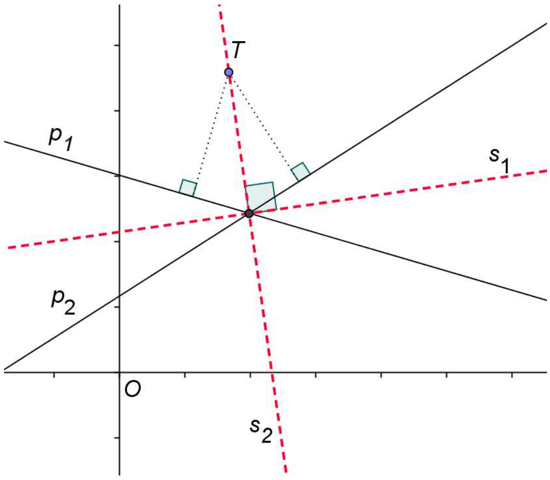
Simetrala kuta određenog s dva pravca

Simetrala kuta je pravac kojemu je svaka točka jednako udaljena od oba kraka kuta.
Neka su p_1 i p_2 dva neparalelna pravca zadana svojim implicitnim jednadžbama:

$$p_1\ldots A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ i}$$
$$p_2\ldots A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Oni određuju dva suplementarna kuta. Simetralu bilo kojeg od tih kutova možemo odrediti koristeći formulu za udaljenost točke od pravca.

simetrala kuta



Iskoristimo uvjet da je svaka točka simetrale jednako udaljena od pravaca p_1 i p_2.. Dakle, mora biti:

$$d(T, p_1) = d(T, p_2),$$

gdje je $T(x, y)$ bilo koja točka tražene simetrale. Odavde slijedi:

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Jednadžbe simetrala kutova što ih određuju pravci $p_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $p_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2 = 0$ glase:

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

jednadžbe simetrala kutova

Izostavimo li apsolutne vrijednosti dobivamo jednadžbe dvaju međusobno okomitih pravaca: jednadžbu simetrala kuta koji ne sadrži ishodište:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

i jednadžbu simetrala kuta koji sadrži ishodište koordinatnog sustava:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Primjer 1. Odredimo simetrale kutova koje određuju pravci $p_1 \ldots x - 7y - 11 = 0$ i $p_2 \ldots x + y + 5 = 0$.

Prema navedenom, mora biti:

$$\frac{|x - 7y - 11|}{\sqrt{1^2 + (-7)^2}} = \frac{|x + y + 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}},$$

tj.

$$\frac{|x - 7y - 11|}{5\sqrt{2}} = \frac{|x + y + 5|}{\sqrt{2}}$$

iz čega je

$$|x - 7y - 11| = 5|x + y + 5|.$$

Odavde je $x - 7y - 11 = 5(x + y + 5)$ ili $x - 7y - 11 = -5(x + y + 5)$. U prvom slučaju dobivamo jednadžbu simetralu $s_1 \ldots x + 3y + 9 = 0$, a u drugom jedna simetrale

$s_2 \ldots 3x - y + 7 = 0$.

Primijetimo da su koeficijenti smjera dviju simetrala $k_1 = -\frac{1}{3}$ i $k_2 = 3$, odnosno da je riječ o paralelnim pravcima.

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. U kojem omjeru sjecište dužine $\overline{AB}$, $A(-1,4)$, $B(3,-2)$ s osi apscisa dijeli dužinu $\overline{AB}$?
2. U točki P koja dužinu $\overline{AB}$, $A(2,1)$, $B(6,-3)$ dijeli u omjeru $3:1$ od točke A povučena je okomica. Kolika je duljina odsječka što ga određuju sjecišta okomice s koordinatnim osima?
3. Odredi simetralu unutarnjeg i vanjskog kuta pri vrhu A trokuta ABC ako je $A(1,-2)$, $B(5,4)$, $C(-2,0)$.
4. Dvije stranice kvadrata pripadaju pravcima $4x - 3y + 11 = 0$ i $4x - 3y + 1 = 0$. Kolika je površina kvadrata?
5. Kolika je duljina dijagonale kvadrata ako je $A(5,0)$ jedan njegov vrh, a jedna njegova stranica leži na pravcu $\frac{x}{-3} + \frac{y}{3} = 1$?
6. Točka $T(-4,5)$ vrh je kvadrata kojemu je dijagonala na pravcu $7x - y + 8 = 0$. Kolika je površina kvadrata?
7. Koliki je odsječak na osi ordinata pravca koji prolazi sjecištem pravaca $7x - 5y - 10 = 0$ i $3x - 2y - 6 = 0$, a paralelan je s pravcem koji prolazi točkama $A(-1,3)$ i $B(2,4)$?
8. U jednadžbi $x + ay - 4 = 0$ odredi realni parametar a tako da duljina odsječka između koordinatnih osi bude jednaka $2\sqrt{5}$.
9. Točkom $T(-2,1)$ položi pravac koji s pravcem $2x + 3y + 6 = 0$ zatvara kut od 45°.
10. Ako su $A(-2,0)$, $B(3,0)$, $C(-4,4)$ vrhovi trokuta ABC, koliki je najveći kut trokuta?

7. KRIVULJE DRUGOG REDA

Kada proučite ovu nastavnu cjelinu, moći ćete odgovoriti na pitanja:

1. *Koje su krivulje drugog reda? Gdje ih nalazimo u svakodnevnom životu?*
2. *Kako glase jednadžbe krivulja drugog reda?*
3. *U kojem međusobnom položaju mogu biti pravac i krivulje drugog reda?*

7.1. JEDNADŽBA KRUŽNICE

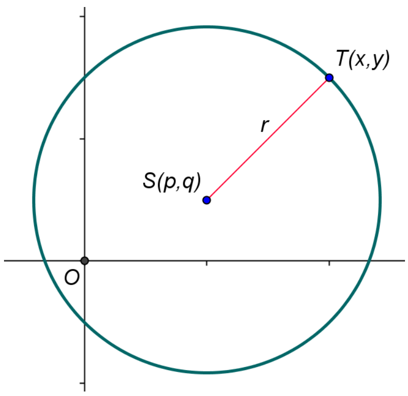
Kružnica je skup točaka T ravnine koje su jednako udaljene od jedne čvrste točke S te ravnine. Točku S nazivamo **središte** kružnice, a udaljenost točke T od središta kružnice **polumjer** ili **radijus** kružnice, označimo ga s r.

kružnica

središte kružnice

polumjer kružnice

Odredimo sada jednadžbu kružnice.



Neka je njezino središte točka $S(p,q)$, a duljina polumjera kružnice neka je r. Za bilo koju točku $T(x,y)$ te kružnice vrijedi

$$|ST| = r,$$

odnosno

$$\sqrt{(x-p)^2+\left(y-q^2\right)} = r.$$

nakon kvadriranja dobijemo:

$$(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2,$$

jednadžba kružnice

i to je **jednadžba kružnice sa središtem u točki S i polumjerom r.**

Ako je središte kružnice u ishodištu koordinatnog sustava, jednadžba kružnice glasi:

$$x^2+y^2 = r^2.$$

Ovu kružnicu nazivamo **središnja** ili **centralna kružnica**.

središnja kružnica

Jednadžbu kružnice možemo pisati i u obliku koji dobivamo kvadriranjem:

$$x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2-r^2 = 0.$$

Tu jednadžbu možemo pisati i u obliku:

$$x^2+y^2+ax+by+c = 0,$$

gdje je $a=-2p$, $b=-2q$ i $c=p^2+q^2-r^2$.
Nazivamo je **opći oblik jednadžbe kružnice**.

opći oblik jednadžbe kružnice

Slijedi da je:

$$p=-\frac{a}{2},\ q=-\frac{b}{2} \text{ i } r^2=p^2+q^2-c.$$

Primjer 1. Napišimo jednadžbu kružnice ako je:

a) $S(-2,3)$, $r=5$

Jednadžba kružnice je $(x+2)^2+(y-3)^2=25$.

b) $S(0,-1)$, $r=\sqrt{3}$

Jednadžba kružnice je $x^2+(y+1)^2=3$.

Primjer 2. Iz jednadžbe kružnice odredimo koordinate središta i duljinu polumjera:

a) $(x-5)^2+(y+2)^2=9$

Iz jednadžbe kružnice čitamo: $S(5,-2)$, $r=3$.

b) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=10$

Iz jednadžbe kružnice čitamo: $S\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $r=\sqrt{10}$.

Primjer 3. Iz jednadžbe kružnice $x^2+y^2-4x+6y-2=0$ odredimo koordinate središta i duljinu polumjera.

Vidjeli smo da je $p=-\frac{a}{2}$, $q=-\frac{b}{2}$ i $r^2=p^2+q^2-c$.

Iz toga je

$$p=-\frac{-4}{2}=2,\ q=-\frac{6}{2}=-3 \text{ i } r^2=2^2+(-3)^2-(-2)=15.$$

pa je: $S(2,-3)$, $r=\sqrt{15}$.

Drugi način rješavanja je svođenje zadane jednadžbe kružnice na potpuni kvadrat. Grupirajmo članove uz pojedine nepoznanice:

$$(x^2-4x)+(y^2+6y)=2.$$

Svaku zagradu nadopunimo do potpunog kvadrata, dodajući lijevoj i desnoj strani jednadžbe kvadrat drugog člana:

$$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=2+4+9.$$

Sada dobivamo:

$$(x-2)^2+(y+3)^2=15$$

pa je $S(2,-3)$, $r=\sqrt{15}$.

Primjer 4. Odredimo skup točaka kojima koordinate x i y ispunjavaju jednadžbu:

a) $x^2+y^2+2x-3y+3=0$

Svođenjem na potpuni kvadrat dobivamo: $(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Zaključujemo da je riječ o kružnici sa središtem u točki $S\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ i polumjerom $r=\frac{1}{2}$.

b) $x^2+y^2+2x-3y+\frac{13}{4}=0$

Svođenjem na potpuni kvadrat dobivamo: $(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=0$. Ovu jednadžbu ispunjava jedino točka $S\left(-1,\frac{3}{2}\right)$. Možemo zamisliti da je riječ o kružnici s polumjerom $r=0$.

c) $x^2+y^2+2x-3y+4=0$
Sada svođenjem na potpuni kvadrat dobivamo jednadžbu:
$(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$, koju ne ispunjava ni ti jedna točka u ravnini.

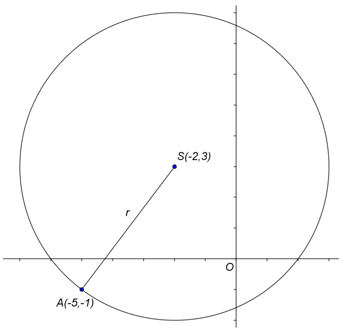
Zaključujemo:

Jednadžba $x^2+y^2+ax+by+c=0$ je:

1. jednadžba kružnice ako je $r^2=p^2+q^2-c>0$,
2. jedna točka ako je $r^2=p^2+q^2-c=0$,
3. prazan skup, tj. ne postoji uređen par (x,y) realnih brojeva x i y koji ispunjava tu jednadžbu, ako je $r^2=p^2+q^2-c<0$.

Pogledajmo sada nekoliko primjera u kojima se traži jednadžba kružnice. Kako je kružnica određena s tri broja p, q i r, problem se svodi na njihovo određivanje.

Primjer 5. Odredimo jednadžbu kružnice ako je njezino središte $S(-2,3)$ i ona prolazi točkom $A(-5,-1)$.



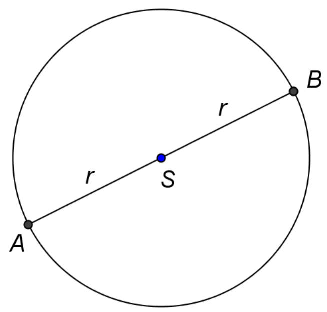
Potrebno je odrediti polumjer kružnice. On je jednak udaljenosti točaka A i S:

$$r=|AS|=\sqrt{(-2+5)^2+(3+1)^2}=\sqrt{25}=5.$$

Zato je jednadžba kružnice:

$$(x+2)^2+(y-3)^2=25.$$

Primjer 6. Odredimo jednadžbu kružnice kojoj je dužina $\overline{AB}$ polumjer ako je $A(-6,-4)$ i $B(2,2)$.



Vidimo da je točka S polovište dužine $\overline{AB}$, tj.
$2r = |AB|$, odnosno $r = |AS| = |BS|$.
Odredimo koordinate središta S:

$$p = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-6+2}{2} = -2,$$
$$q = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1.$$

pa je $S(-2,-1)$.
Dalje je:

$$r = |AS| = \sqrt{(-2+6)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Jednadžba kružnice je: $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Primjer 7. Odredimo jednadžbu kružnice koncentrične kružnici $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$ koja:

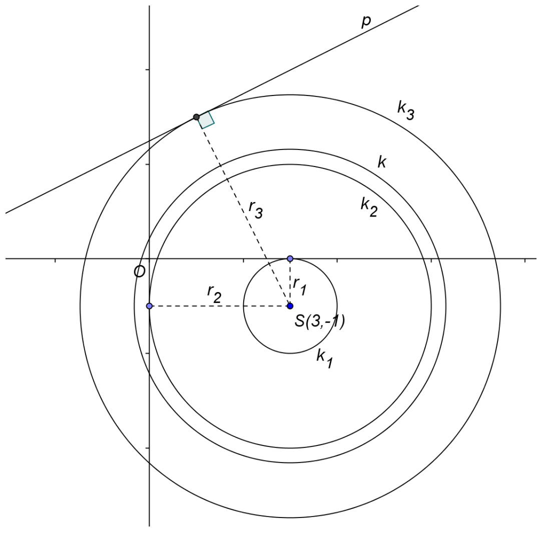
a) dira x os,
b) dira y os,
c) dira pravac $x - 2y + 5 = 0$.

Koncentrične kružnice su kružnice koje imaju zajedničko središte, a različite duljine polumjera. Odredimo zato najprije središte traženih kružnica:

koncentrične kružnice

$$p = -\frac{-6}{2} = 3,\ q = -\frac{2}{2} = -1,$$

odnosno $S(3,-1)$.



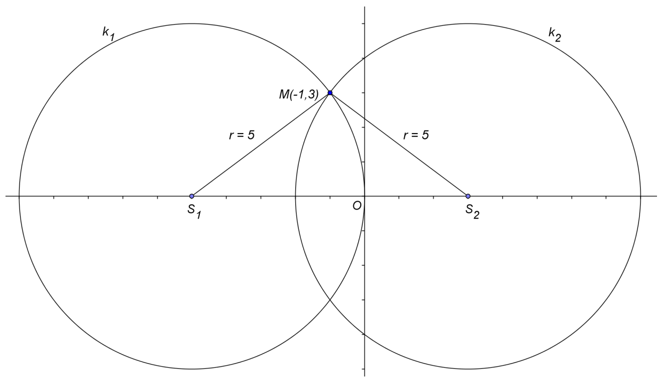
a) Kružnica k_1 koja dodiruje x os ima jednadžbu:
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 1.$$

b) Kružnica k_2 koja dodiruje y os ima jednadžbu:
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9.$$

c) Kružnica k_3 koja dodiruje zadani pravac ima polumjer:
$$r = d(S,p) = \frac{|3 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

i jednadžbu: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 20$.

Primjer 8. Napiši jednadžbu kružnice koja prolazi točkom $M(-1,3)$, ima $r=5$, a središte joj je na x osi.



Kako kružnica prolazi točkom M, njene koordinate moraju ispunjavati jednadžbu kružnice pa je:

$$(-1-p)^2+(3-q)^2=r^2.$$

Uvrštavanjem zadanih podataka $r=5$ i $q=0$ (jer je središte kružnice na x osi), dobivamo jednadžbu:

$$(-1-p)^2+(3-0)^2=5^2,$$

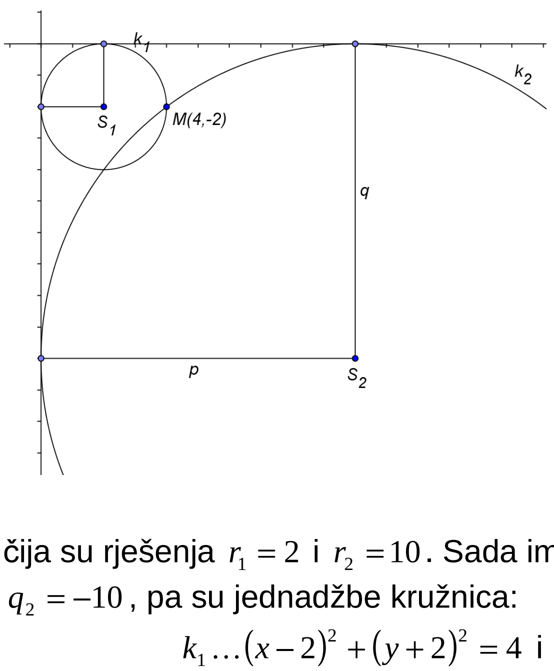
odnosno

$$(-1-p)^2=16$$

čija su rješenja $p_1=-5$ i $p_2=3$ pa su jednadžbe kružnica:

$$k_1\ldots(x+5)^2+y^2=25 \text{ i } k_2\ldots(x-3)^2+y^2=25.$$

Primjer 9. Odredimo jednadžbu kružnice koja prolazi točkom $M(4,-2)$ i dira obje koordinatne osi.



Budući da kružnica prolazi točkom M, njezine koordinate ispunjavaju jednadžbu kružnice i vrijedi:

$$(4-p)^2+(-2-q)^2=r^2.$$

Kako tražena kružnica dira obje koordinatne osi, a točka M pripada četvrtom kvadrantu mora biti:

$$p=r \text{ i } q=-r.$$

Sada je

$$(4-r)^2+(-2+r)^2=r^2.$$

Sređivanjem dobivamo jednadžbu:

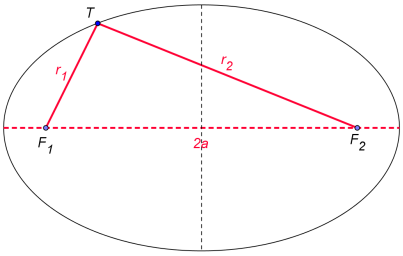
$$r^2-12r+20=0,$$

čija su rješenja $r_1=2$ i $r_2=10$. Sada imamo: $p_1=2$ i $q_1=-2$ te $p_2=10$ i $q_2=-10$, pa su jednadžbe kružnica:

$$k_1\ldots(x-2)^2+(y+2)^2=4 \text{ i } k_1\ldots(x-10)^2+(y+10)^2=100.$$

7.2. JEDNADŽBE ELIPSE

Odaberemo li dvije točke F_1 i F_2 ravnine i komad konopca duljine $2a > |F_1F_2|$, učvrstimo krajeve konopca u točkama F_1 i F_2, olovkom zategnemo konopac te ju pomičemo tako da je konopac stalno zategnut, olovka će opisivati krivulju koja nazivamo elipsa.



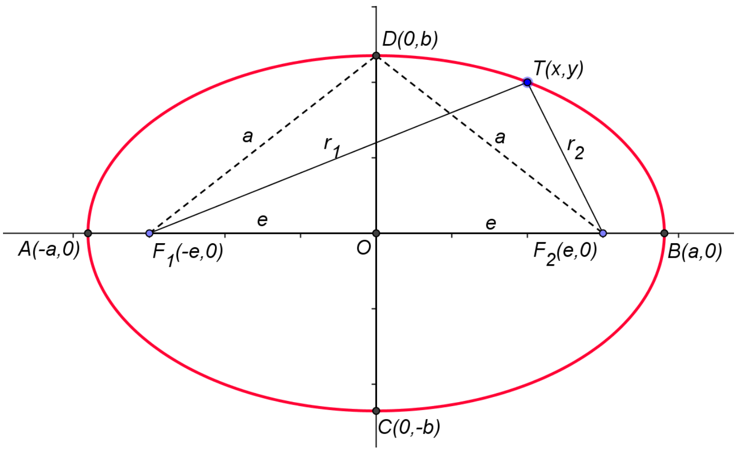
Bez obzira na položaj olovke, odnosno točke T, uvijek je:

$$|F_1T| + |F_2T| = 2a\,,\ a > 0\,.$$

elipsa

Elipsa je skup točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti od dvije fiksne točke te ravnine konstantan.

Pogledajmo oznake i nazive:



fokusi

središte elipse

linearni ekscentricitet

Točke F_1 i F_2 nazivaju se **fokusi** ili **žarišta** elipse. Udaljenost fokusa označimo s $2e$. Polovište O dužine $\overline{F_1F_2}$ nazivamo **središte** ili **centar** elipse. Polovica udaljenosti između fokusa jednaka je e, tj. $|OF_1| = |OF_2| = e$ i nazivamo je **linearni ekscentricitet**.

Ako je $e = 0$, tj. fokusi F_1 i F_2 se podudaraju, elipsa postaje kružnica. Što je e veći $(e < a)$, oblik elipse sve više odstupa od oblika kružnice.

glava tjemena

velika os

Pravac kroz fokuse siječe elipsu u točkama A i B koje nazivamo **glavna tjemena**. Dužinu $\overline{AB}$ nazivamo **velika os** elipse, pa su dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ **velike poluosi** elipse. Duljina velike osi jednaka je $2a$, pa je duljina velika poluosi jednaka a.

sporedna tjemena

mala os

Pravac koji prolazi središtem okomito na veliku os siječe elipsu u točkama C i D koje nazivamo **sporedna tjemena**. Dužinu $\overline{CD}$ nazivamo **mala os** elipse, pa su dužine $\overline{OC}$ i $\overline{OD}$ **male poluosi** elipse. Duljina male osi jednaka je $2b$, pa je duljina male poluosi jednaka b.

Iz $|F_1D| + |F_2D| = 2a$ i sukladnosti trokuta F_1OD i F_2OD slijedi da je

$|F_1D| = |F_2D| = a$. Primjenom Pitagorina poučka na npr. pravokutan trokut F_1OD dobivamo da je:

$$e^2 = a^2 - b^2 .$$

Da bismo odredili jednadžbu elipse smjestimo elipsu u koordinatni sustav kao na slici. Neka njezino središte bude u ishodištu koordinatnog sustava, velika os neka leži na x osi, a mala na y osi. Tjemena elipse tada su u točkama $A(-a,0)$, $B(a,0)$, $C(0,-b)$ i $D(0,b)$, a fokusi u točkama $F_1(-e,0)$ i $F_2(e,0)$.

Elipse sa središtem u ishodištu i osima koje leže na koordinatnim osima ima jednadžbu:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \ldots \text{ osni oblik jednadžbe elipse,}$$

tj.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \text{ kanonski oblik jednadžbe elipse.}$$

jednadžba elipse

Količnik $\frac{e}{a}$ označavamo s ε i nazivamo **numerički ekscentricitete** elipse. Za njega vrijedi $0 \le \varepsilon < 1$. Za kružnicu je $\varepsilon = 0$.

numerički ekscentricitet

Neka je $T(x,y)$ točka elipse. Označimo li $r_1 = |F_1T|$ i $r_2 = |F_2T|$, onda vrijedi:

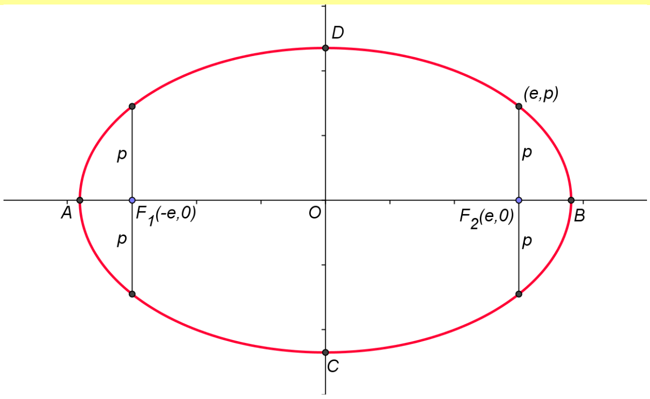
$$r_1 = a + \varepsilon x \text{ i } r_2 = a - \varepsilon x .$$

Tetiva elipse koja prolazi fokusom i okomita je na veliku os naziva se **parametar** elipse i njegova se duljina označava s $2p$ $(p > 0)$.

parametar elipse

Rubna točka parametra ima koordinate $(\pm e, \pm p)$ ili $(\pm e, \mp p)$. Kako je to točka elipse, njezine koordinate moraju ispunjavati jednadžbu elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ iz čega dobivamo:

$$p = \frac{b^2}{a} .$$

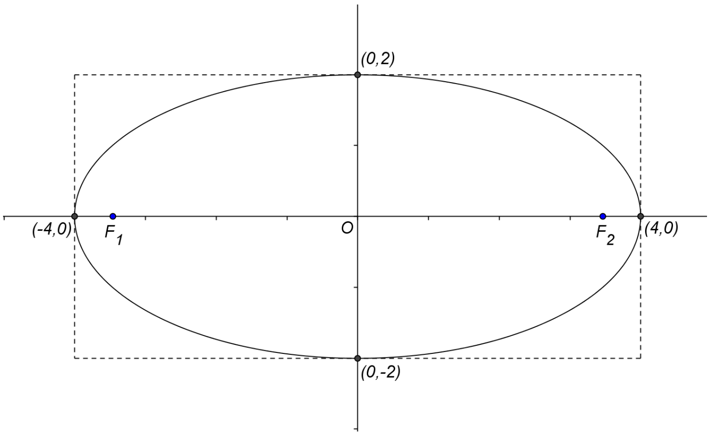


Primjer 1. Odredimo a, b, e, ε, p i koordinate fokusa te nacrtajmo skicu elipse ako je zadana jednadžbom $x^2 + 4y^2 = 16$.

Zapišimo jednadžbu elipse u kanonskom obliku. Dijeljenjem zadane jednadžbe elipse sa 16 dobivamo:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,$$

iz čega je $a^2=16$ i $b^2=4$, odnosno $a=4$ i $b=2$.
Skicu je najlakše nacrtati ako elipsu upišemo u pravokutnik sa stranicama $2a$ i $2b$:



Iz $e^2=a^2-b^2$ dobivamo $e=2\sqrt{3}$, odnosno $F_1\left(-2\sqrt{3},0\right)$ i $F_2\left(2\sqrt{3},0\right)$.

Dalje je:

$$\varepsilon=\frac{e}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ i

$$p=\frac{b^2}{a}=\frac{2^2}{4}=1.$$

Primjer 2. Odredimo jednadžbu elipse koja prolazi točkama $A(-6,-4)$, $B(8,-3)$.

Točke A i B su točke elipse pa njihove koordinate ispunjavaju jednadžbu elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, tj. vrijedi:

$$\begin{cases}36b^2+16a^2=a^2b^2\\ 64b^2+9a^2=a^2b^2\end{cases}.$$

Dobili smo sustav dviju jednadžbi s nepoznanicama a i b. Oduzmemo li jednadžbe dobivamo:

$$-28b^2+7a^2=0,$$

odnosno

$$a^2=4b^2.$$

Uvrštavanjem dobivenog u npr. prvu jednadžbu imamo:

$$36b^2+64b^2=4b^4,$$

odnosno

$$100b^2=4b^4$$

pa je

$$b^4-25b^2=0.$$

Sada je

$$b^2\left(b^2-25\right)=0.$$

Dobivamo $b^2=25$ i $a^2=100$. Tražena jednadžba je: $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

Primjer 3. Odredimo jednadžbu elipse koja prolazi točkom $A(-8,3)$ i ima parametra 5.

Budući da točka A pripada elipsi, njezine koordinate ispunjavaju jednadžbu elipse, tj. vrijedi: $64b^2 + 9a^2 = a^2b^2$. Dalje je zadano $p = \frac{b^2}{a} = \frac{5}{2}$ iz čega je $b^2 = \frac{5}{2}a$. Sada je:

$$\frac{320}{2}a + 9a^2 = \frac{5}{2}a^3,$$

odnosno

$$5a^3 - 18a^2 - 320a = 0$$

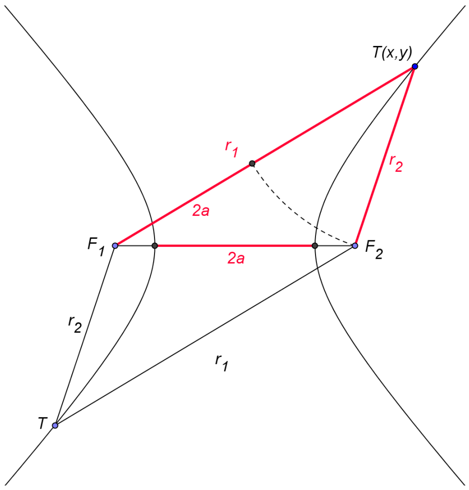
te

$$a(5a^2 - 18a - 320 = 0).$$

Dobivamo $a = 10$. Jednadžba elipse je $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$.

7.3. JEDNADŽBA HIPERBOLE

Neka su F_1 i F_2 dvije čvrste točke ravnine. Označimo $|F_1F_2| = 2e$. Neka je T točka ravnine različita od točaka F_1 i F_2. Vektore $\overrightarrow{F_1T}$ i $\overrightarrow{F_2T}$ nazivamo radijvektorima točke T. Označimo duljine tih vektora s: $r_1 = \left|\overrightarrow{F_1T}\right|$ i $r_2 = \left|\overrightarrow{F_2T}\right|$. Neka je a pozitivan realan broj manji od e.



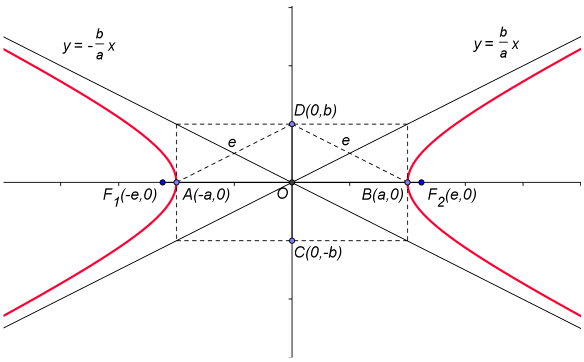
Hiperbola je skup svih točaka T u ravnini za koje vrijedi:

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

hiperbola

Kako su r_1, r_2 i $2e$ duljine stranica trokuta F_1F_2T mora biti $|r_1 - r_2| < 2e$, odnosno $a < e$.

Smjestimo hiperbolu u koordinatni sustav kao na slici. Pogledajmo oznake i nazive:



Točke F_1 i F_2 nazivaju se **fokusi** ili **žarišta** hiperbole. Udaljenost fokusa označimo s $2e$. Polovište O dužine $\overline{F_1F_2}$ nazivamo **središte** ili **centar** hiperbole. Polovica udaljenosti između fokusa jednaka je e, tj. $|OF_1| = |OF_2| = e$ i nazivamo je **linearni ekscentricitet**.

Pravac kroz fokuse siječe hiperbolu u točkama A i B koje nazivamo **glavna tjemena**. Dužinu $\overline{AB}$ nazivamo **realna (glavna) os** hiperbole, pa su dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ **realne (glavne) poluosi** hiperbole. Duljina realne osi jednaka je $2a$, pa je duljina realne poluosi jednaka a.

Točke C i D nazivamo **imaginarna tjemena** hiperbole. Dužinu $\overline{CD}$ nazivamo **imaginarna (sporedna) os** hiperbole, pa su dužine $\overline{OC}$ i $\overline{OD}$ **imaginarne (sporedne) poluosi** hiperbole. Duljina imaginarne osi jednaka je $2b$, pa je duljina imaginarne poluosi jednaka b.

fokusi

središte hiperbole

linearni ekscentricitet

glavna tjemena

realna os

imaginarna tjemena

imaginarna os

Tjemena hiperbole su u točkama $A(-a,0)$, $B(a,0)$, $C(0,-b)$ i $D(0,b)$, a fokusi u točkama $F_1(-e,0)$ i $F_2(e,0)$.

Primjenom Pitagorina poučka na npr. pravokutan trokut F_1OD dobivamo da je:

$$e^2 = a^2 + b^2 .$$

Hiperbole sa središtem u ishodištu i osima koje leže na koordinatnim osima ima jednadžbu:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \ldots \text{ osni oblik jednadžbe hiperbole,}$$

tj.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \text{ kanonski oblik jednadžbe hiperbole.}$$

jednadžba hiperbole

Kao i kod elipse, količnik $\frac{e}{a}$ označavamo s ε i nazivamo **numerički ekscentricitete** hiperbole. Za njega vrijedi $\varepsilon > 1$.

numerički ekscentricitet

Neka je $T(x, y)$ točka hiperbole i neka je $r_1 = |F_1T|$ i $r_2 = |F_2T|$. Vrijedi:

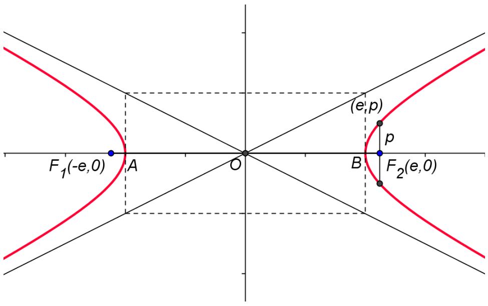
$$r_1 = \varepsilon x + a \text{ i } r_2 = \varepsilon x - a .$$

Tetiva hiperbole koja prolazi fokusom i okomita je na glavnu os naziva se **parametar** hiperbole i njegova se duljina označava s $2p$ $(p > 0)$.

Rubna točka parametra ima koordinate $(\pm e, \pm p)$ ili $(\pm e, \mp p)$, a račun daje:

$$p = \frac{b^2}{a} .$$

parametar hiperbole



Udaljenost točaka hiperbole od pravaca $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$ teži k nuli kada se točka udaljava od ishodišta. Nazivamo ih **asimptote** hiperbole.

asimptote hiperbole

Pri crtanju hiperbole korisno je nacrtati njezine asimptote jer pomoću njih i tjemena hiprebolu možemo preciznije i lakše nacrtati.

Zadaci i formule vrlo su slični kao kod rješavanja zadataka s elipsom.

Primjer 1. Odredimo jednadžbu hiperbole kojoj je $F_1\left(-3\sqrt{5},0\right)$ fokus, a pravac $x + 2y = 0$ asimptota.

Zadano je $e = 3\sqrt{5}$ pa je $a^2 + b^2 = 45$. Zapišemo li jednadžbu zadanog pravca u eksplicitnom obliku, tj. $y = -\frac{1}{2}x$ dobivamo $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, odnosno $a = 2b$. Sada je

$$4b^2 + b^2 = 45,$$

iz čega je $b = 3$. Slijedi $a = 6$ pa je jednadžba hiperbole $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Primjer 2. Odredimo jednadžbu hiperbole kojoj su fokusi hiperbole na x osi, ona prolazi točkom $T\left(\frac{15}{2},-6\right)$ i ima asimptotu $4x - 3y = 0$.

Točka T pripada hiperboli pa njezine koordinate ispunjavaju jednadžbu hiperbole, tj. vrijedi:

$$\frac{225}{4}b^2 - 36a^2 = a^2b^2.$$

Iz jednadžbe asimptote zapisane u eksplicitnom obliku $y = \frac{4}{3}x$ dobivamo

$\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, odnosno $b = \frac{4}{3}a$.

Sada je:

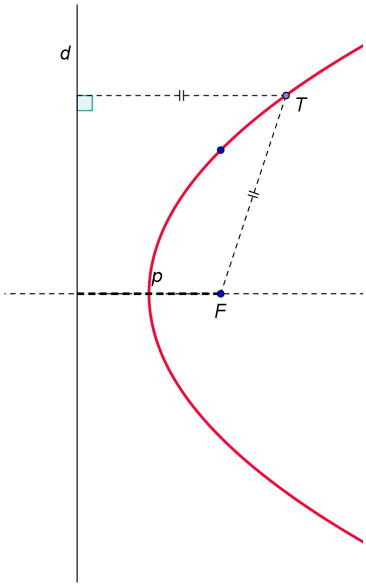
$$\frac{225}{4}\cdot\frac{16}{9}a^2 - 36a^2 = \frac{16}{9}a^4,$$

odnosno

$$64a^2 = \frac{16}{9}a^4$$

pa je $a^2 = 36$. Slijedi $a = 6$ i $b = 8$ pa je jednadžba hiperbole $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

7.4. JEDNADŽBA PARABOLE



Parabola je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jednog čvrstog pravca d i jedne točke F u toj ravnini koja ne leži na tom pravcu.

parabola

Pravac d nazivamo **direktrisa** (**ravnalica**) parabole, a točku F **fokus** (**žarište**) parabole.

direktrisa

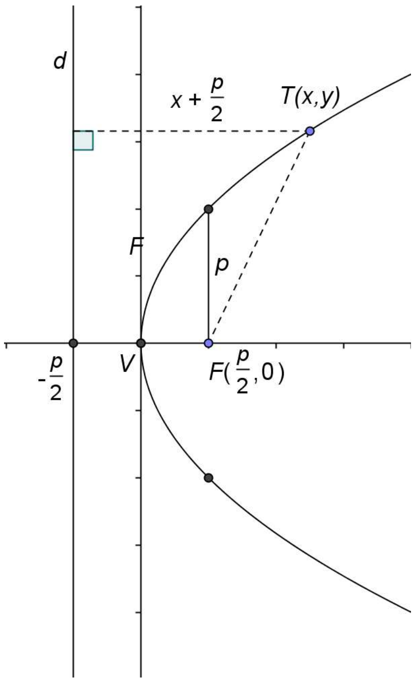
fokus

Udaljenost fokusa od direktrise označavamo s p i nazivamo **poluparametar** parabole.

poluparame-tar

Postavimo najprije parabolu tako da njezino tjeme (vrh) podudara s ishodištem koordinatnog sustava, os s x osi, a fokus leži na pozitivnom dijelu x osi. Takvu parabolu nazivamo **vršna parabola**.

vršna parabola



Tjeme V raspolavlja udaljenost od fokusa do direktrise. Ta je udaljenost jednaka poluparametru p parabole. Zato su koordinate fokusa $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, a jednadžba direktrise $x = -\frac{p}{2}$.

Izaberimo bilo koju točku $T(x, y)$ na paraboli.

Njezina udaljenost od direktrise je $x + \frac{p}{2}$.

Lako se pokaže da **parabola** koja ima tjeme u ishodištu, a fokus na pozitivnom dijelu x osi ima **jednadžbu**:

$$y^2 = 2px.$$

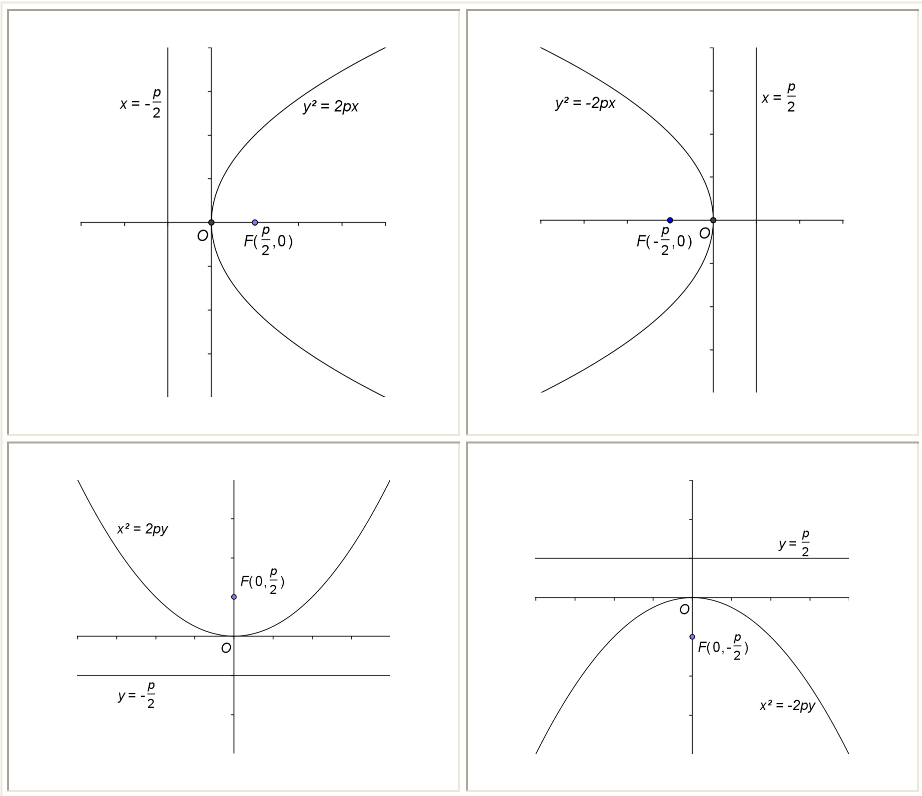
jednadžba parabole

Translatirana parabola koja ima vrh u točki $V(x_0, y_0)$ ima **jednadžbu**:

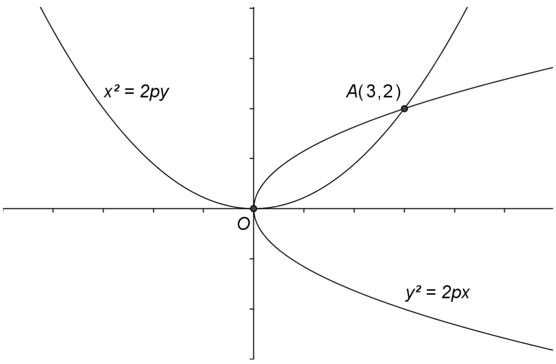
$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

jednadžba translatirane parabole

U tablici su navedeni posebni oblici jednadžbe parabole:



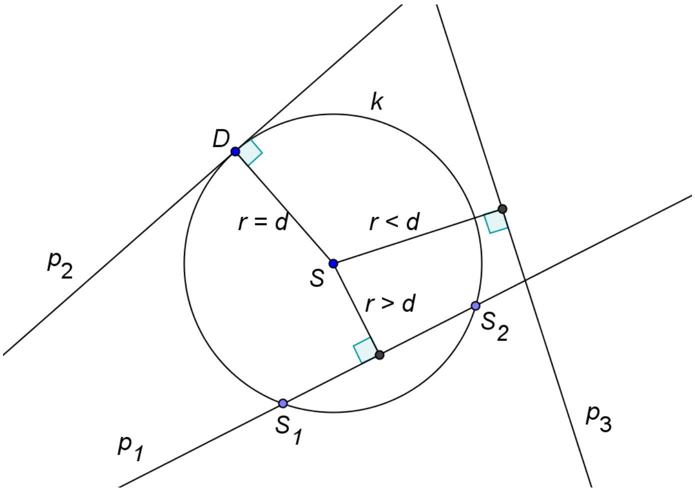
Primjer 1. Odredimo vršnu jednadžbu parabole koja prolazi točkom $A(3,2)$.



Sa slike vidimo da postoje dva rješenja. Koordinate točke A moraju ispunjavati jednadžbu parabole pa za $y^2 = 2px$ dobijemo $4 = 6p$, odnosno $2p = \dfrac{4}{3}$ pa jednadžba parabole glasi $y^2 = \dfrac{4}{3}x$. Za $x^2 = 2py$ dobijemo $9 = 4p$, odnosno $2p = \dfrac{9}{2}$ pa jednadžba parabole glasi $x^2 = \dfrac{9}{2}y$.

7.5. PRAVAC I KRUŽNICA

Neka je $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ jednadžba kružnice i $y = kx + l$ jednadžba pravca. Označimo s d udaljenost središta kružnice od zadanog pravca.



Međusobni položaj pravca i kružnice:

1. Pravac p_1 siječe kružnicu u dvije točke S_1 i S_2 ako je $d < r$.
   Pravac koji siječe kružnicu nazivamo **sekanta**.
2. Pravac p_2 dira kružnicu u točki D ako je $d = r$.
   Pravac koji dira kružnicu nazivamo **tangenta**, a točku D **dirالište** pravca i kružnice.
3. Pravac p_3 i kružnica nemaju zajedničkih točaka ako je $d > r$.

međusobni položaj pravca i kružnice

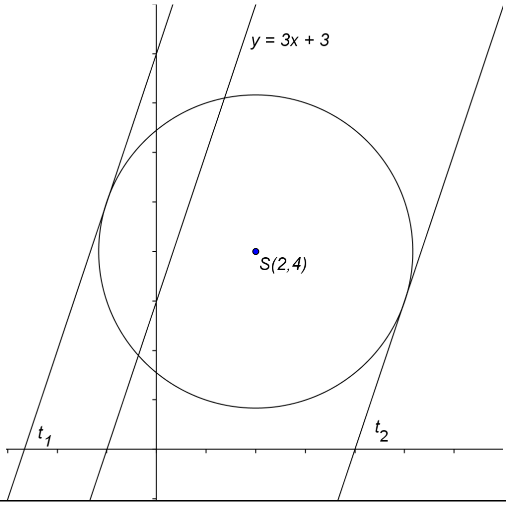
Iz $d = \frac{|q - kp - l|}{\sqrt{1+k^2}} = r$ dobivamo **uvjet dodira pravca $y = kx + l$ i kružnice** $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$:

$$r^2(1+k^2) = (q - kp - l)^2.$$

uvjet dodira pravca i kružnice

Primjer 1. Odredimo jednadžbe tangenata kružnice $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$ koje su paralelne s pravcem $y = 3x + 3$.

Tražimo pravac $y = kx + l$ koji mora dodirivati kružnicu pa mora ispunjavati uvjet dodira.



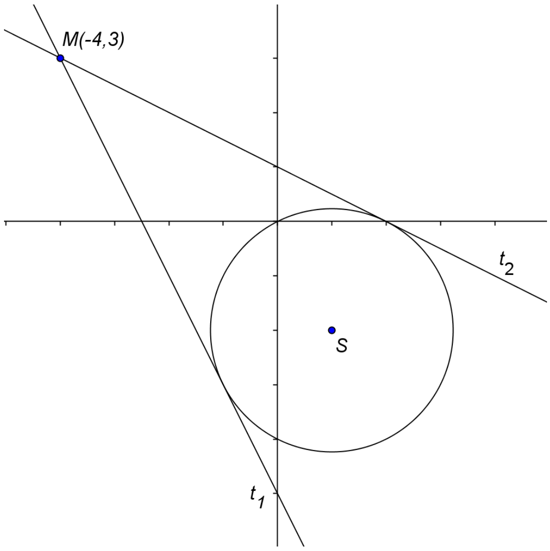
Najprije iz jednadžbe kružnice dobivamo $p = 2$, $q = 4$ i $r^2 = 10$.
Budući su tražene tangente paralelne sa zadanim pravcem slijedi da je $k_t = 3$.
Uvrštavanjem u uvjet dodira pravca i kružnice dobivamo:

$$10(1+3^2) = (4 - 6 - l)^2$$

iz čega je $l_1 = 8$ i $l_2 = -12$ pa su jednadžbe tangenata $t_1 \ldots y = 3x + 8$ i $t_2 \ldots y = 3x - 12$.

Primjer 2. Odredimo jednadžbe tangenata povučenih iz točke $M(-4,3)$ na kružnicu $(x-1)^2+(y+2)^2=5$.

Tražimo pravac $y=kx+l$. Osim uvjeta dodira mora biti ispunjen i uvjet da pravac prolazi točkom M.



Prema navedenom imamo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} 5(1+k^2)=(-2-k-l)^2 \\ 3=-4k+l \end{cases}.$$

Uvrstimo li $l=4k+3$ u prvu jednadžbu sustava dobivamo:

$$5+5k^2=(-2-k-4k-3)^2,$$

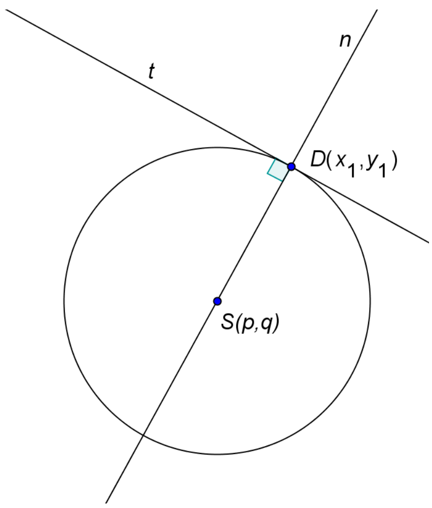
odnosno

$$2k^2+5k+2=0$$

pa je $k_1=-2$ i $k_2=-\frac{1}{2}$, odnosno $l_1=-5$ i $l_2=1$. Jednadžbe tangenata su $t_1 \ldots y=-2x-5$ i $t_2 \ldots y=-\frac{1}{2}x+1$.

Normala krivulje je pravac koji prolazi diralištem tangente okomito na nju. Kako je polumjer kružnice pridružen diralištu okomit na tangentu, svaka normala kružnice prolazi središtem kružnice.

normala krivulje



Iz navedenog lako dobivamo **jednadžbu tangente u točki $D(x_1,y_1)$ kružnice** $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$:

$$(x_1-p)(x-p)+(y_1-q)(y-q)=r^2.$$

jednadžba tangente u točki kružnice

Označimo li s k_t koeficijent smjera tangente, onda je $k_n=-\frac{1}{k_t}$ koeficijent smjera normale. Budući da normala prolazi točkom $D(x_1,y_1)$, njezina je jednadžba $y-y_1=k_n(x-x_1)$.

jednadžba normale

Primjer 3. Odredimo jednadžbu tangente i normale u točki $D(1,y<0)$ kružnice $x^2+y^2-6x+2y+2=0$.

Odredimo najprije nepoznatu koordinatu točke D. Uvrštavanjem $x=1$ u jednadžbu kružnice dobivamo:

$$1+y^2-6-2y+2=0,$$

odnosno jednadžbu

$$y^2-2y-3=0$$

čija su rješenja $y_1=-3$ i $y_2=1$ pa je $D(1,-3)$.

Iz jednadžbe kružnice dobivamo $p=3$, $q=-1$ i $r^2=8$.

Sada je

$$(1-3)(x-3)+(-3+1)(y+1)=8$$

pa je $t \ldots y=-x-2$. Budući da je $k_t=-1$ slijedi $k_n=-\frac{1}{k_t}=1$ pa je

$$y+3=1(x-1),$$

odnosno $n \ldots y=x-4$.

7.6. PRAVAC I ELIPSA, HIPERBOLA, PARABOLA

Analogno međusobnom položaju pravca i kružnice promatramo međusobni položaj pravca i ostalih krivulja drugog reda. U tablicama koje slijede navedene su formule do kojih dolazimo i koje koristimo u zadacima:

Za pravac jednadžbe $y=kx+l$ i elipsu jednadžbe $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ vrijedi:

pravac i elipsa

uvjet dodira pravca i elipse:	$a^2k^2+b^2=l^2$
koodrinate dirališta:	$D\left(-\frac{ka^2}{l},\frac{b^2}{l}\right)$
jednadžba tangente elipse u točki $D(x_1,y_1)$:	$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2 \quad \left(\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1\right)$

Za pravac jednadžbe $y=kx+l$ i hiperbolu jednadžbe $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ vrijedi:

pravac i hiperbola

uvjet dodira pravca i hiperbole:	$a^2k^2-b^2=l^2$
koodrinate dirališta:	$D\left(-\frac{ka^2}{l},-\frac{b^2}{l}\right)$
jednadžba tangente hiperbole u točki $D(x_1,y_1)$:	$b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2 \quad \left(\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1\right)$

Za pravac jednadžbe $y=kx+l$ i parabolu jednadžbe $y^2=2px$ vrijedi:

uvjet dodira pravca i parabole:	$p = 2kl$
koodrinate dirališta:	$D\left(\frac{l}{k}, 2l\right)$
jednadžba tangente parabole u točki $D(x_1, y_1)$:	$yy_1 = p(x + x_1)$

pravac i parabola

ZADACI ZA VJEŽBU:

1. Odredi jednadžbu kružnice kojoj je $\overline{AB}$ promjer ako je $A(-1,2)$ i $B(-5,-6)$.
2. Odsječak pravca $2x - 3y + 12 = 0$ između koordinatnih osi je promjer kružnice. Nađi jednadžbu kružnice.
3. Nađi jednadžbu kružnice koncentrične kružnici $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$ koja:
   a) dira os x
   b) dira os y
   c) dira pravac $4x - 3y + 14 = 0$
4. Napiši jednadžbu kružnice koja prolazi točkama $A(-2,1)$ i $B(1,-4)$, a središte joj je na osi x.
5. Odredi jednadžbu kružnice koja dodiruje obje koordinatne osi i prolazi točkom $M(-8,1)$.
6. Napiši jednadžbu kružnice koja prolazi točkama $A(5,11)$, $B(-9,-3)$ i $A(-7,-5)$.
7. U kojem su međusobnom položaju dani pravac i dana kružnica:
   a) $x + 3y + 10 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$
   b) $x - 2y - 1 = 0$, $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$
   c) $2x - y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$
8. Odredi jednadžbe tangenata kružnice $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ koje su okomite na pravac $x - 2y + 1 = 0$.
9. Pod kojim se kutom sijeku tangente povučene iz točke $P(2,-2)$ na kružnicu $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ (kut pod kojim se vidi kružnica iz zadane točke).
10. Napiši jednadžbe tangente i normale u točki $D(-4,6)$ kružnice $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$.
11. U sjecištima pravca $x - 3y - 6 = 0$ s kružnicom $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ konstruirane su tangente na kružnicu. U kojoj se točki sijeku te tangente i pod kojim kutom?
12. Napiši jednadžbu elipse ako je :
    a) $b = 3$, $\varepsilon = \frac{4}{5}$,
    b) $e = 6$, $p = 5$,
    c) $p = 2\sqrt{2}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
13. Napiši jednadžbu elipse ako je :
    a) $a - b = 2$, $p = 1$,
    b) $a + b = 15$, $F_1\left(-5\sqrt{3}, 0\right)$,
    c) $a + b = 7$, $e = 2$,

d) $a+b=16$, $\varepsilon=\frac{4}{5}$.

14. Odredi jednadžbu elipse ako je njen fokus $F\left(10\sqrt{2},0\right)$, a velika poluos je tri puta veća od male poluosi.

15. Napiši jednadžbu elipse koja prolazi točkama $A(-3,2)$ i $B\left(4,-\frac{3}{2}\right)$.

16. Odredi jednadžbu elipse ako je $M\left(-2\sqrt{6},-2\right)$ rubna točka parametra.

17. Napiši jednadžbu elipse koja prolazi točkom $A\left(-4,\sqrt{10}\right)$ i ima poluparametar 3.

18. Odredi jednadžbu elipse ako je njen fokus $F(-6,0)$, a ona prolazi točkom $A\left(-5,-4\sqrt{3}\right)$.

19. Odredi jednadžbu hiperbole kojoj je asimptota:

a) $x-3y=0$ i poluparametar $p=\frac{4}{3}$,

b) $2\sqrt{5}x+5y=0$, a hiperbola prolazi točkom $A(-5,-4)$,

c) $24x-7y=0$ i fokus $F(25,0)$,

d) $3x+2y=0$, a zbroj poluosi je 15.

20. Napiši jednadžbu hiperbole kojoj je poluparametar:

a) $p=\frac{4}{3}$ i fokus $F\left(-\sqrt{13},0\right)$,

b) $p=\frac{25}{13}$ i numerički escentricitet je $\frac{13}{12}$,

c) $p=4$, a ona prolazi točkom $A(-5,3)$.

21. Napiši jednadžbu hiperbole kojoj je fokus:

a) $F(5,0)$, a zbroj poluosi 7,

b) $F\left(-\sqrt{3},0\right)$, a hiperbola prolazi točkom $A(-3,-4)$,

c) $F\left(4\sqrt{5},0\right)$ i $a+p=10$.

22. Odredi jednadžbu hiperbole kojoj je $M(2,3)$ rubna točka parametra.

23. Napiši jednadžbu hiperbole kojoj je numerički eksentricitet:

a) $\varepsilon=\frac{5}{4}$, a $C(0,12)$ je imaginarno tjeme,

b) $\varepsilon=\sqrt{2}$, a hiperbola prolazi točkom $A(5,-3)$,

c) $\varepsilon=\frac{5}{4}$, a zbroj poluosi je 14.

24. Napiši jednadžbu hiperbole koja prolazi točkama $A(-6,1)$ i $B\left(8,-2\sqrt{2}\right)$.

25. Odredi jednadžbu tangente i normale u točki $D(x<0,\ 3)$ elipse $3x^2+4y^2=48$.

26. Nađi jednadžbe tangenata elipse $4x^2+9y^2=36$ okomitih na pravac $x-2y-6=0$.

27. Hiperbola prolazi točkom $A(6,-1)$, a pravac $x+2y=0$ je asimptota hiperbole. Odredi jednadžbu tangente i normale povučene na hiperbolu u točki A.

28. Odredi udaljenosti dirališta tangenata povučenih iz točke $P(-1,2)$ na hiperbolu $x^2-2y^2=2$.

KONTROLNA ZADAĆA – ZADACI ZA SAMOPROVJERU ZNANJA

PRIMJER PISANOG ISPITA ZNANJA IZ MATEMATIKE

1. a) Odredi glavnu mjeru i prikaži na brojevnoj kružnici točku $E(t)$ ako je $t=-\frac{307\pi}{6}$. Označi vrijednosti svih trigonometrijskih funkcija za zadani broj *t*.
   b) Odredi na brojevnoj kružnicu točku $E(t)$ $ctgt=\frac{9}{4}$ i $\cos t<0$.

2. Bez upotrebe džepnog računala izračunaj:
   a) vrijednosti preostalih trigonometrijske funkcija ako je $tg\alpha=-\frac{35}{12}$, $\alpha\in\left\langle -4950°,-4860°\right\rangle$,
   b) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ ako je $\cos x=-\frac{12}{13}$, $x\in\left\langle 7\pi,\frac{15\pi}{2}\right\rangle$.

3. Riješi trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbu:
   a) $-2\sin\left(\frac{5x}{6}-\frac{\pi}{6}\right)-1=0$,
   b) $6\sin^2 x+3\sin x\cdot\cos x-13\cos^2 x=5$,
   c) $\cos\frac{x}{2}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Nacrtaj graf funkcije: $f(x)=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

5. Odredi duljinu težišnice t_b trokuta ABC ako je $a=6$ cm, $\alpha=47°47'$ i $\beta=50°14'$.

6. Površina paralelograma jednaka je 62.6 cm², a duljine stranica jednake su 14.2 cm i 7 cm. Kolike su duljine dijagonala paralelograma?

7. Ako su točke $B(5,3)$, $C(0,8)$ i $D(-3,5)$ tri uzastopna vrha paralelograma $ABCD$, odredi koordinate vrha A i duljinu dijagonale $\overline{AC}$.

8. Dane su točke $A(-1,1)$, $B(-3,-2)$, $C(4,1)$. Koristeći se skalarnim produktom vektora, odredi kut α trokuta *ABC*.

9. a) Odredi realni broj λ tako da vektori $\vec{p}=(\lambda+2)\vec{m}+\vec{n}$ i $\vec{q}=5\vec{m}+(\lambda-2)\vec{n}$ budu kolinearni.
   b) Odredi realni broj λ tako da vektori $\vec{a}=\lambda\vec{i}-\frac{1}{9}\vec{j}$ i $\vec{b}=\frac{1}{3}\vec{i}-3\vec{j}$ budu međusobno okomiti.

10. Odredi površinu trokuta koji s koordinatnim osima zatvara pravac koji prolazi sjecištem pravaca $5x-4y-22=0$ i $3x+5y+9=0$ i točkom $A(4,1)$.

11. Zadan je trokut ABC koordinatama vrhova $A(4,4)$, $B(-2,-4)$, $C(-6,-1)$. Odredi:
    a) jednadžbu pravca na kojemu leži težisnica t_a.
    b) jednadžbu pravca na kojemu leži visina v_c,
    c) jednadžbu pravca koji prolazi točkom C i paralelan je s pravcem AB,
    d) udaljenost točke C od pravca AB.

12. Nađi jednadžbu kružnice koncentrične kružnici $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$ koja:
   a) dira os x,
   b) dira os y,
   c) dira pravac $4x - 3y + 14 = 0$.

13. Pravac $x - 3y - 6 = 0$ siječe kružnicu $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ u točkama D_1 i D_2. Odredi koordinate točaka D_1 i D_2 i jednadžbe tangenata kojima su točke D_1 i D_2 dirališta.

14. Odredi jednadžbu hiperbole kojoj je pravac $24x - 7y = 0$ asimptota, a udaljenost fokusa jednaka 50.

15. Nađi jednadžbe tangenata elipse $x^2 + 3y^2 = 28$ okomitih na pravac $3x - 2y - 1 = 0$.

KORIŠTENA LITERATURA:

[1] I. Čavlović, M. Lapaine, *Matematika* 3, udžbenik sa zbirkom zadataka za strukovne škole, I. i II. dio, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[2] Branimir Dakić, Neven Elezović, Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija, 1. i 2. dio, Element, Zagreb, 2006.

[3] S, Varošanec, *Matematika* 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred tehničkih škola, Element, Zagreb, 1998..